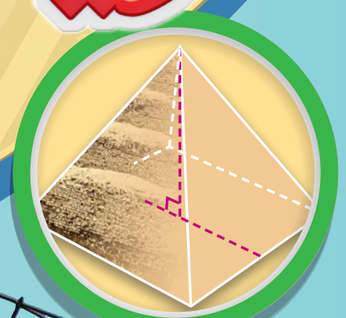
القسم العلمى

تطبيقات الرياضيات

الصف الثانى الثانوى

كتـــاب الطالـــب





SAKKARA PUBLISHING

تطبيقات الرياضيات الصف الثانى الثانوى

تطبيقات الرياضيات

كتاب الطالب الصف الثانى الثانوى

- إن التنافس مع الذات هو أفضل تنافس.
- من وثق بالله أغناه ومن توكل عليه كفاه.
- من يعش فى خوف، فلن يكون حرًا أبدًا.
- امدح صديقك علنًا وعاتبه سرًا.
- اختر كلماتك قبل أن تتحدث.
- الشعوب وحدها هى القادرة على تحرير نفسها وتحقيق أحلامها.







تطبيقات الرياضيات

الصف الثانى الثانوى

كتـــاب الطالـــب

SAKKARA
PUBLISHING

إعداد

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ نبيل توفيق الضبع

أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

جميع الحقوق محفوظة لا يجور نشر أى جزء من هذا الكتاب أو تصويره أو تخزينه أو تسجيله بأى وسيلة دون موافقة خطية من الناشر.

شركة سقارة للنشر

ش.م.م

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:

١ التأكيد على أن الغاية الأساسية من هذا الكتاب هى مساعدة المتعلم على حل المشكلات واتخاذ القرارات فى حياته اليومية, والتى تساعده على المشاركه فى المجتمع.

٢ التأكيد على مبدأ استمرارية التعلم مدى الحياة من خلال العمل على أن يكتسب الطلاب منهجية التفكير العلمى، وأن يمارسوا التعلم الممتزج بالمتعة والتشويق، وذلك بالاعتماد على تنمية مهارات حل المشكلات وتنمية مهارات الاستنتاج والتعليل، واستخدام أساليب التعلم الذاتى والتعلم النشط والتعلم التعاونى بروح الفريق، والمناقشة والحوار، وتقبل آراء الآخرين، والموضوعية فى إصدار الأحكام، بالإضافة إلى التعريف ببعض الأنشطة والإنجازات الوطنية.

٣ تقديم رؤى شاملة متماسكة للعلاقة بين العلم والتكنولوجيا والمجتمع(STS) تعكس دور التقدُّم العلمى فى تنمية المجتمع المحلى، بالإضافة إلى التركيز على ممارسة الطلاب التصرُّف الواعى الفعّال حِيال استخدام الأدوات التكنولوجية.

٤ تنمية اتجاهات إيجابية تجاه الرياضيات ودراستها وتقدير علمائها.

٥ تزويد الطلاب بثقافة شاملة لحسن استخدام الموارد البيئية المتاحة.

٦ الاعتماد على أساسيات المعرفة وتنمية طرائق التفكير، وتنمية المهارات العلمية، والبعد عن التفاصيل والحشو، والابتعاد عن التعليم التلقينى؛ لهذا فالاهتمام يوجه إلى إبراز المفاهيم والمبادئ العامة وأساليب البحث وحل المشكلات وطرائق التفكير الأساسية التى تميز مادة الرياضيات عن غيرها.

وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:

★ تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة لكل منها مقدمة توضح أهدافها ودروسها ومخطط تنظيمى لها والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية بينهم وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ ينتهي الكتاب بإختبارات عامة تشمل جميع المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في وحداته.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

المحتويات

الاستاتيكا

الوحدة الأولى

مقدمة عن تطور علم الميكانيكا. ٢

القـــوى. ٨

تحليل القوى. ١٦

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة. ٢١

اتزان جسيم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة. ٢٦

ملخَّص الوحدة. ٣٦

تمارين عامة (الوحدة الأولى). ٣٧

اختبار تراكمى ٣٩

الديناميكا

الوحدة الثانية

الحركة المستقيمة. ٤٢

الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة. ٥٣

السقوط الحر. ٦٢

قانون الجذب العام. ٦٧

ملخَّص الوحدة. ٧٢

تمارين عامة (الوحدة الأولى). ٧٤

اختبار تراكمى ٧٦

المحتويات

الهندسة والقياس

الوحدة الثالثة

الهرم والمخروط. ٨٠

المساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط. ٨٥

حجم الهرم والمخروط القائم. ٨٩

معادلة الدائرة. ٩٤

ملخَّص الوحدة. ١٠٥

تمارين عامة (الوحدة الأولى). ١٠٦

اختبار تراكمى ١٠٨

الإحصاء والاحتمال

الوحدة الرابعة

تمثيل البيانات. ١١٢

وصف البيانات. ١١٦

الاحتمال. ١٢٢

ملخَّص الوحدة. ١٤٤

تمارين عامة (الوحدة الأولى). ١٤٦

اختبار تراكمى ١٥٠

اختبارات عامة. ١٥٢

اجابات بعض التمارين ١٦٤

مقدمة عن تطور علم الميكانيكا

➢ الميكانيكا بالمفهوم العام هو العلم الذى يقوم بدراسة حركة أو اتزان الأجسام المادية، وذلك باستخدام القوانين الخاصة بها، فمثلًا هناك قوانين تَسرى على دوران الأرض حول الشمس و إطلاق الصواريخ أو قذيفة المدفع أو غير ذلك. و يقصد بها التغير الذى يَحدث بمرور الزمن لمواضع الأجسام المادية فى الفراغ ، والتأثير الميكانيكى المتبادل بين الأجسام هو التأثير الذى تتغير له حركة هذه الأجسام ، طبقًا لتأثيرات القوى المختلفة عليها ، لذلك فإن المسألة الأساسية فى الميكانيكا هى دراسة القوانين العامة لحركة واتزان الأجسام المادية تحت تأثير القوى عليها. وتنقسم الميكانيكا إلى:

الاستاتيكا[1] *Statics*

(**علم توازن الأجسام**) يبحث فى سكون الأجسام تحت تأثير مجموعة من المؤثرات تُسمى القوى ، وتوصف القوى التى لا تُغير من حالة الجسم بأنها متزنة، و يقال للجسم: إنه فى حالة توازن تحت تاثير هذه القوى.

الديناميكا[2] *Dynamics*

(**علم حركة الأجسام**) والتى تتضمن قوانين حركة الأجسام المادية تحت تأثير القوى ، وتنقسم الديناميكا إلى: **الكينماتيكا Kinematics** وهى تبحث فى خصائص الحركة من الوجهة الهندسية (وصف الحركة وصفًا مجردًا دون التعرض للقوى المسببة لها)، و **الكيناتيكا Kinetics** وهى تبحث فى تأثير القوى المسببة أو المغيرة للحركة.

وهناك:

ميكانيكا النقطة المادية (أى الجسم الذى يمكن إهمال أبعاده عند بحث حركته أو اتزانه).

ميكانيكا الجسم الجاسئ Rigid Bodies (أى الجسم المكون من عدد كبير جدًّا من الجسيمات المترابطة مع بعضها بحيث إن المسافه بين أي جسيمين منها تكون ثابتة ولا تتأثر بأي مؤثر خارجي).

١ – سوف ندرس فى هذه الوحدة مفهوم القوة وخواصها ووحدات قياسها وتحليل القوة إلى مركبتين ، وإيجاد محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة ، ثم دراسة اتزان نقطة مادية تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة وتطبيقات عليها.

٢ – سوف ندرس فى هذه الوحدة (الكينماتيكا) وهى التى تختص بوصف حركة الأجسام دون التعرض للقوى المسببة لها وتتناول هذه الدراسة حركة الأجسام والظواهر المصاحبة لهذه الحركة ومسببات الحركة وقوانينها وتطبيقات على الحركة الأفقية والرأسية بعجلة منتظمة وقانون الجذب العام لنيوتن.

ميكانيكا الأجسام ذات الكتل المتغيرة (توجد لبعض الأنظمة والأجسام تَغيرات تَطرأ عليها تتغيَّر فيها الكتلة بتغير الزمن كأن يَنفصل عنها أو يتحد بها جُسيمات تَنقص أو تَزيد من كتلتها فى أثناء الحركة، ومن هذه الأجسام الصواريخ النفاثة وعربات المناجم التى تَتغير كتلتها نتيجة استهلاك الوقودِ وغيرها من الأنظمة المختلفة).

ميكانيكا الأجسام القابلة للتشكيل (المرونة Elasticity) هى خاصية الأجسام التى لها القدرة على الرجوع إلى شكلها و أبعادها الأصلية بعد تشكيلها، أما اللدونة Plasticity وهي عند تَعرُّض الأجسام إلى مؤثرات خارجية لا تعود إلى حالتها الطبيعية عند زوال المؤثِّر الخارجي.

ميكانيكا الموائع *Fluid* Mechanics

أحد فروع ميكانيكا الكم وهو يدرس اساسًا الموائع (سوائل، غازات، ...) والقوى المؤثرة عليها و ينقسم إلى استاتيكا الموائع أو دراستها فى حالة السكون وديناميكا الموائع أو دراستها فى حالة الحركة و يندرج تحتها تخصصات أخرى مثل الديناميكا الهوائية (ايروديناميك) والديناميكا المائية (هيدروديناميك).

الميكانيكا الحيوية *Biomechanics*:

هى تَطبيق للمبادئ الميكانيكية على الكائنات الحية ، وهذا يَشمل دراسة وتحليل ميكانيكا الكائنات الحية وتَطبيق المبادئ الهندسية واستقائها من الأنظمة الحياتية.

ومن الأمثلة البسيطة لأبحاث الميكانيكا الحيوية تَشمل دراسة القوى المؤثِّرة على الأطراف (الأعضاء)، والديناميكا الهوائية لطيران الحشرات والطيور، وميكانيكا الموائع في سباحة السمك ، الثباتية والرسوخ التي تُقدمها جذور الأشجار، وجمع أنواع الحركة في كل أشكال الحياة ، بدءًا من الخلايا المفردة ارتقاءًا إلى جميع الأحياء، والميكانيكا الحيوية للجسم البشري هو في صُلب عِلم الحركة ،حيث تلعب الميكانيكا التطبيقية أدوارًا أساسية في دراسة الميكانيكا الحيوية. وخصوصًا الديناميكا الحرارية ، وميكانيكا الأوساط المتصلة ، وفروع الهندسة الميكانيكية.

كما أن هناك أبحاثًا أكثر في مجال نمو و إعادة تشكل الأعضاء كرد على هذه الحمولات المطلقة. مثلاً، تأثير ضغط الدم المرتفع على ميكانيكية جدران الشرايين، وسلوك الخلايا العضلية القلبية مع احتشاء القلب ، ونمو العظام كاستجابة لممارسات معينة ، ونمو النباتات التأقلمي مع حركة الريح ، تُعتبر كشاهد على أن الأنسجة الحية تتشكل من جديد كنتيجة مباشرة للأحمال المطبقة. توظف علوم الرياضيات المختلفة لحل المشاكل الحياتية وتَشمل الجبر الخطي ، والمعادلات التفاضلية ، والتكامل ، والهندسة ، والميكانيكا والتوبولوجي والإحصاء وغيرها.

وسوف ندرس فى هذا المنهج **الميكانيكا** الخاصة بالنقطة المادية والجسم الجاسئ والقوانين العامة للحركة ، وذلك بصفتها قاعدة علمية لكثير من المجالات الحديثه والتى تفسر سلسلة من الظواهر الهامة التى تحدث فى عالمنا وتؤدى بالتالى إلى تطور علم المعرفة بالطبيعة ككل و إلى تَكوين وجهة نَظر مادية علمية صحيحة.

وقد بدات الدراسة العامة لاتزان الأجسام (الاستاتيكا) فى العصور القديمة نتيجة لمتطلبات الإنتاج البسيطة فى هذا الوقت (كالرافعة والبوابة والمستوى المائل وغيرها) وكان لمؤلفات أرشميدس دور هام فى هذا الوقت لترسيخ علم الاستاتيكا.

أما **الديناميكا** فبدأت بعد ذلك بأمد طويل نتيجة النهضة فى النقل والتجارة والصناعة والإنتاج وصناعة الأسلحة والاكتشافات الفلكية، ويرجع الفضل الرئيسى فى تأسيس علم الديناميكا إلى العالِمَين الكبيرين: **جاليليو جاليلى (١٥٦٤ – ١٦٤٢) وإسحق نيوتن (١٦٤٢ – ١٧٢٧).**

وفى القرن الثامن عشر بدأت تتطور الطرق التحليلية فى الميكانيكا، والتى بنيت على تطبيق حساب التفاضل والتكامل وحل المعادلات التفاضلية (بالإضافة إلى الطرق العددية باستخدام الحاسب الآلى المتبع حاليًا) فى حلِّ العديد من مسائل الديناميكا، والتى مازالت متبعة حتى الوقت الحالى، ويرجع الفضل فى ذلك إلى أبحاث العالمين الفرنسيين دالمبير (١٧١٧ – ١٧٨٣) ولاجرانج (١٧٣٦ – ١٨١٣).
وقد وضع أساس ميكانيكا الأجسام ذات الكتل المتغيرة العالم الروسى تسيلكوفسكى (١٨٤٧ – ١٩٢١) حيث قام باكتشافات أساسية فى نظرية الحركة النفاثة وحركة الصواريخ ، وكان للعالم الروسى كريلوف (١٨٦٣ – ١٩٤٥) دور بارز فى وضْع نظرية السفن وتطوير نظرية الأجهزة الجيروسكوبية.

النظرية النسبية العامة *General relativity theory*

النظرية النسبية لأينشتاين غيّرت الكثير من المفاهيم بما يتعلق بالمصطلحات الأساسية في الفيزياء: المكان، الزمان الكتلة والطاقة. حيث أحدثت نقلة نوعية في الفيزياء النظرية وفيزياء الفضاء في القرن العشرين. عند نشرها لأول مرة وعدلت النظرية الميكانيكة لنيوتن التي كانت قائمة لمدة ٢٠٠ عام.

قامت نظرية النسبية بتحويل مفهوم الحركة لنيوتن، حيث نَصَّت بأنَّ كلَّ الحركة نسبية. ومفهوم الوقت تَغير من كونه ثابتًا ومحدد، إلى كونه بعد آخر غير مكاني. وجعلت الزمان والمكان شيئًا موحدًا بعد أن كان يتم التعامل معهما كشيئين مختلفين. وجعلت مفهوم الوقت يتوقَّف على سرعة الأجسام، وأصبح تقلص وتَمدُّد الزمن مفهومًا أساسيًا لفهم الكون.وبذلك تَغيرت كل الفيزياء الكلاسيكية النيوتونية.

في مجال الفيزياء كان للنظرية النسبية أهمية كبيرة، حيث عمقت من فهم التفاعلات الحادثة بين الجسيمات، مما أدى لقدوم العصر النووي، وكذلك باستخدام النظرية النسبية استطاع علماء الكون والفضاء التنبؤ بظواهر طبيعية وكونية مثل الثقوب السوداء وموجات الجاذبية.

ميكانيكا الكم Quantum mechanics:

هي مجموعة من النظريات الفيزيائية التي ظهرت في القرن العشرين، وذلك لتفسير الظواهر على مستوى الذرة والجسيمات وقد دمجت بين الخاصية الجسيمية والخاصية الموجية ليظهر مصطلح ازدواجية (الموجة – الجسيم) ، وبهذا تُصبح ميكانيكا الكم مسئولة عن التفسير الفيزيائي على المستوى الذري، كما أنها أيضًا تطبق على الميكانيكا الكلاسيكية، ولكن لاتظهر تأثيرها على هذا المستوى، لذلك فإن ميكانيكا الكم هي تعميم للفيزياء الكلاسيكية لإمكانية تطبيقها على المستويين الذري والعادي. وسبب تسميتها بميكانيكا الكم يعود إلى أهميّة الكم في بنائها (وهو مصطلح فيزيائي يستخدم لوصف أصغر كمّية من الطاقة يُمكن تَبادلها بين الجسيمات، ويُستخدم للإشارة إلى كميات الطاقة المحددة التي تَنبعث بشكلٍ متقطعٍ، وليس بشكلٍ مُستمر).

الفيمتو ثانية Femtosecon

الفيمتو ثانية: هو جزء من مليون مليار جزء من الثانية، أي (عشرة مرفوعة للقوة (-١٥)) والنسبة بين الثانية والفيمتو ثانية هي النسبة بين الثانية و٣٢ مليون سنة.

في العام ١٩٩٠ تَمكَّن العالم المصرى أحمد زويل من تثبيت اختراعه المعروف بكيمياء الفيمتو، وذلك بعد جهد مضنٍ مع فريق بحثه القابع في معهد كاليفورنيا للتقنية امتد منذ العام ١٩٧٩ ، و يتَلخَّص اختراعه في اختراع وحدة زمنية تخطَّت حاجز الزمن العادي إلى وحدة زمن الفيمتو ثانية ، وتوصَّل هذا العالم إلى اكتشافه العلمي باستخدام نبضات ليزر قصيرة المدى وشعاع جزيئي داخل أمبوب مفرغ ، وكاميرا رقمية ذات مواصفات فريدة، وذلك لتصوير حركة الجزيئات منذ ولادتها وقبل التحاقها لباقي الجزيئات الأخرى ، وأصبح بالإمكان التدخل السريع ومباغتة التفاعلات الكيميائية عند حدوثها باستخدام نبضات الليزر كتليسكوب للمشاهدة ومتابعة عمليات الهدم والبناء في الخلية، وقد جعل هذا العالم العربي العملاق الباب مفتوحًا لاستخدام هذا الاكتشاف العلمي في مجال الطب ، الفيزياء ، أبحاث الفضاء وغيره الكثير وسُجِّلت باسمه مدرسة علمية جديدة عُرِفَت باسم كيمياء الفيمتو.



الوحدة الأولى

الاستاتيكا
Statics

مقدمة الوحدة

ولد إسحق نيوتن عام ١٦٤٢م فى مقاطعة لنكولن بإنجلترا حيث أمضى دراسته فى جامعة كامبردج حتى نال درجة البكالوريوس وكان لأستاذه «إسحاق بارو» الفضل الأكبر فى تنمية معارفه الرياضية، حيث ابتكر نيوتن قوانين الميكانيكا الأساسية كما اكتشف قانون الجاذبية وطبقه على الأجرام السماوية ، كما ابتدع حساب التفاضل واكتشف المعادلات التفاضلية للحركة ، كما كان لنيوتن أبحاث فى البصريات، حيث ابتكر تلسكوبا عاكسًا بقوة تكبير ٣٠ ضعفًا، وقد عرض نيوتن عام ١٦٨٧م كتاب المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية الذى يتكون من ثلاثة أجزاء ويعتبر أساس علم الميكانيكا الكلاسيكى والذى عرف فيما بعد بقوانين نيوتن للحركة بالإضافة لقانون الجذب العام، وقد منحته ملكة إنجلترا عام ١٧٠٥م لقب فارس وظل فى هذا المنصب حتى توفى عام ١٧٢٧م ومن أقوال نيوتن المشهورة عن نفسه «لست أعلم كيف ابدوا للعالم، ولكننى أبدوا لنفسى وكأننى صبى يلعب على شاطئ البحر ، ألهو بين الحين والحين بالعثور على حصاة ملساء أو صدفة أجمل من العادة، بينما ينبسط محيط الحقيقة العظيم مغلق الأسرار أمامى».

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف وحدات القياس المختلفة (عند دراسة الموضوعات المتعلقة بها)
- وحدات قياس المسافة – الإزاحة التى تستخدم فى قياس الأطوال الكبيرة (مثل الكيلومتر والميل)، والتى تستخدم لقياس الأطوال المتناهية فى الصغر (مثل النانومتر) ودراسة العلاقة بينها.
- وحدات قياس الزمن (... – الساعة – الدقيقة – الثانية – – الفيمتوثانية)، ودراسة العلاقة بينها.
- وحدات قياس الكتلة (... ـ كيلوجرام – جرام – ...) ودراسة العلاقة بينها.
- وحدات قياس السرعة، والعجلة، والقوة.
- يتعرف مفهوم القوة ، والقوة كمتجه ، ووحدات قياس مقدار القوة فى ضوء وحدات القياس السابقة.
- يوجد محصلة قوتين مقدارا واتجاها (القوتان تؤثران فى نفس النقطة).
- يتعرف تحليل قوة معلومة إلى مركبتين.
- يتعرف تحليل قوة معلومة إلى مركبتين متعامدتين.
- يوجد محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة.
- يبحث اتزان نقطة مادية (جسيم) تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة فى الحالات الآتية:

 إذا اتزنت قوتان مستويتان متلاقيتان فى نقطة.

 إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية متلاقية فى نقطة.

 إذا اتزنت عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة.
- يوجد محصلة قوتين هندسيًّا وجبريًّا مستخدمًا تكنولوجيا المعلومات فى صورة أنشطة.
- يتعرف تطبيقات ما درسه فى الاستاتيكا فى مواقف فيزيائية وحياتية.



المصطلحات الأساسية

استاتيكا	Statics	تحليل قوة	Resolving force
قوة	Force	مركبة قوة	force Component
جسم جاسئ	Rigid body	اتزان جسم	equilibrium of a body
قوة التثاقل	Gravitation force	قاعدة مثلث القوى	triangle of forces
عجلة السقوط الحر	acceleration of gravity	قاعدة لامى	lami's rule
نيوتن	Newton	اتزان جسم جاسئ	Equilibrium of rigid body
داين	Dyne	مستوى أملس	smooth plane
ثقل كيلو جرام	Kilogram weight	مستوى مائل أملس	inclined smooth plane
ثقل جرام	Gram weight	مركز ثقل	centre of gravity
خط عمل قوة	Line of action of the force		

دروس الوحدة

الدرس (١ - ١): القوى.

الدرس (١ - ٢): تحليل قوة إلى مركبتين.

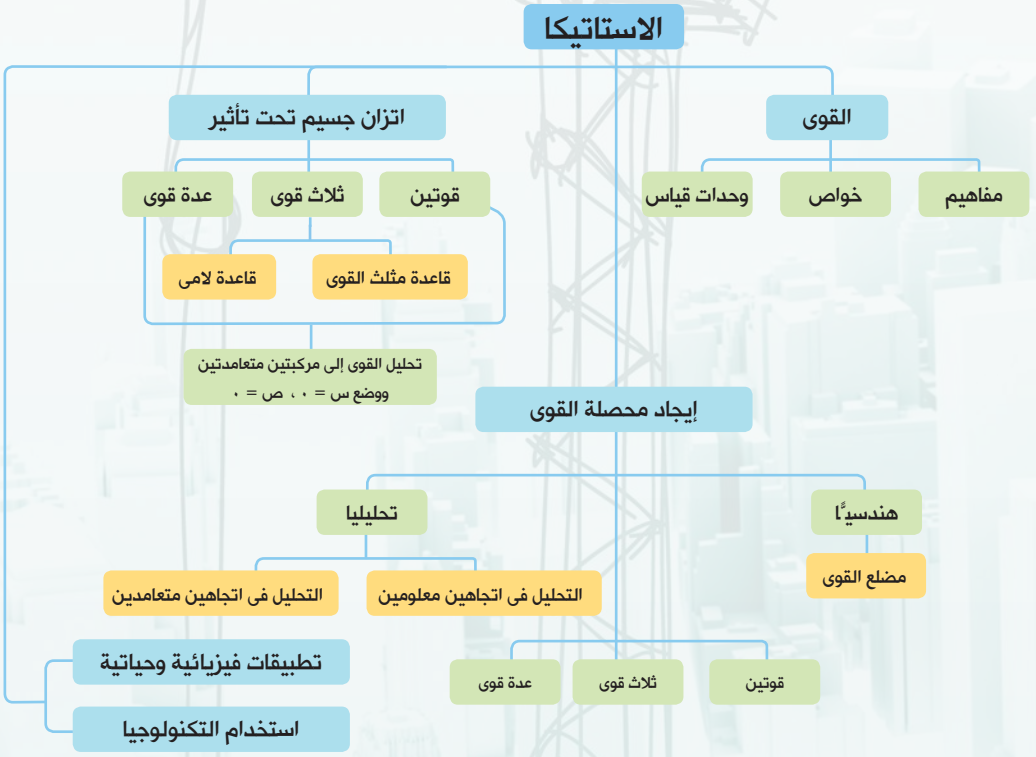
الدرس (١ - ٣): محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة

الدرس (١ - ٤): اتزان جسم جاسئ تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب Graphical computer programs

مخطط تنظيمى للوحدة





القـوى
Forces

سوف تتعلم

- بعض المفاهيم الأساسية فى الاستاتيكا.
- خواص القوة
- محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة.
- إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليا.

المصطلحات الأساسيّة

قوة	Force
محصلة	Resultant
جسم جاسئ	Rigid body
قوة التثاقل	Gravitation force
عجلة السقوط الحر	Acceleration of gravity
نيوتن	Newton
داين	Dyne
ثقل كيلو جرام	Kilogram weight
ثقل جرام	Gram weight

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
 Scientific calculator
- برامج رسومية
 Graphical programs

تمهيد:

عَلمت أنَّ الاستاتيكا هى فرع الميكانيكا الذى يدرس **القوى وشروط اتزان الأجسام المادية التى تؤثِّر عليها القوى** ، وستكون دراستنا فى هذه الوحدة على اتزان الأجسام الجاسئة [١] فقط.

ومن دراستك فى المتجهات علمت الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة.

تذكر أن

الكمية القياسية **Scalor** تتحدد تحديدًا تامًا بقيمتها العددية مثل المسافة ، الكتلة ، الزمن ، المساحة ، الحجم...

الكمية المتجهة **Vector** وتتحدد باتجاهها بالإضافة إلى قيمتها العددية مثل القوة والإزاحة والسرعة ،...

القوة: *Force*

تتوقف حالة اتزان أو حركة الجسم على طبيعة التأثير الميكانيكى المتبادل بينه وبين الأجسام الأخرى، أى على حالات الضغط أو الشد أو التجاذب أو التنافر التى تحدث للجسم نتيجةً لهذا التأثير.

تعريف

➢ تعرف القوة بأنها تأثير أحد الاجسام الطبيعية علي جسم طبيعي آخر.

خواص القوة:

يتحدد تأثير القوة على الجسم بالعوامل الآتية:

أولاً: مقدار القوة (قيمتها العددية).

يَتعين مقدار القوة بمقارنتها بوحدة القوى والوحدة الأساسية لقياس القوة فى الميكانيكا هى **النيوتن (N)** أو ثقل الكيلوجرام **(kg.wt)** حيث:

➢ ١ ث كجم = ١٠٠٠ ث جم ، ١ نيوتن = 10^5 داين

➢ ١ ث كجم = ٩,٨ نيوتن ، ١ ث جم = ٩٨٠ داين

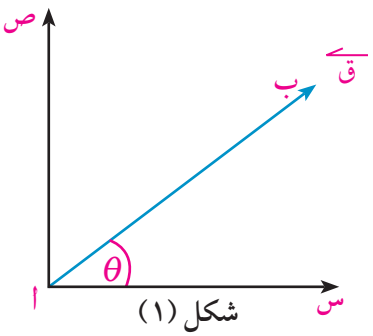
(مالم يذكر خلاف ذلك) [٢]

١ – الجسم الجاسئ هو الجسم الذى يحتفظ بشكله دون تشوه إذا وقع تحت تأثير عوامل خارجية.

٢ – قوة التثاقل (أو الوزن) هى مقدار جذب الأرض للجسم ، حيث إن الارض تجذب الأجسام الساقطة نحوها وتختلف قيمة عجلة السقوط الحر للأجسام من مكان لأخر على سطح الأرض والقيمة التقريبية لها تساوى ٩,٨ م/ ث^2 مالم يذكر خلاف ذلك.وسيعرض هذا الموضوع بالتفصيل فى مواضع أخرى فى الميكانيكا.

ثانيا: اتجاه القوة

يُمثل شكل (١) المجاور متجه القوة $\overrightarrow{ق}$ ويُمكِن تَمثيله بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ حيث أ نقطة البداية، ب نقطة النهاية للقطعة المستقيمة الموجهة ويُعبر عن مقدار القوة بمعيار المتجه $||\overrightarrow{أب}||$ (طوله)(بمقياس رسم مناسب) ويناظر اتجاه السهم اتجاه القوة $\overrightarrow{ق}$ ، وتسمى زاوية θ بالزاوية القطبية للمتجه في مستوى القوة $\overrightarrow{ق}$ وتُكتب على الصورة القطبية كالآتي $(ق ، \theta)$.



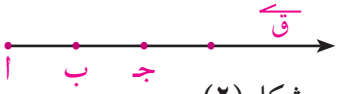
شكل (١)

أضف إلى معلوماتك

الزاوية القطبية **polar angle** هي الزاوية الموجبة التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ثالثًا: نقطة تأثير القوة

في شكل (١): تَنطبق نقطة أ عادة على نقطة تاثير القوة $\overrightarrow{ق}$ ، ويُمكِنُ نَقْل نقطة تأثير القوة $\overrightarrow{ق}$ إلى أي نقطة أخرى، بحيث تقع على خط عمل $\overrightarrow{ق}$ دون أن يغير ذلك من تأثيرها على الجسم كما في **شكل (٢)** خط عمل القوة يسمى $\overrightarrow{أب}$ في **شكل (١)** بخط عمل القوة $\overrightarrow{ق}$ أيْ أنَّ خط عمل القوة هو الخط المستقيم المار بنقطة تأثيرها والموازي لاتجاهها.



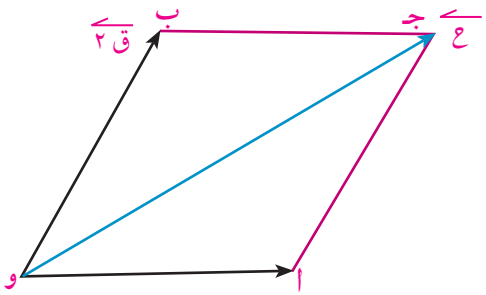
شكل (٢)

محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة:

لكل قوتين مؤثرتين على جسم في نقطة واحدة ، قوة محصلة تؤثر في نفس النقطة، .تقوم بنفس التأثير الذي تقوم به القوتان وتمثل هندسيًّا بقطر متوازي الأضلاع المرسوم بهاتين القوتين كضلعين متجاورين فيه.

ففي الشكل المقابل نجد أنَّ: $\overrightarrow{ع}$ الممثل لقطر متوازي الأضلاع و$\overrightarrow{جـ}$ يُمثل محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

أيْ أنَّ: $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢}$



مثال

استخدام برنامج (GeoGebra)

(١) $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ قوتان تُؤثِّران في نقطة من جسم جاسئ ،حيث $\overrightarrow{ق_١}$ = ٣٠٠ نيوتن في اتجاه الشرق، $\overrightarrow{ق_٢}$ = ٤٠٠ نيوتن وتعمل في اتجاه ٦٠° شمال الغرب. أوجد محصلة القوتين.

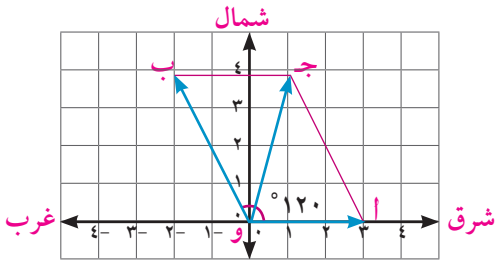
الحل

نختار مقياس رسم ١ سم لكل ١٠٠ نيوتن.

نرسم $||\overrightarrow{ق_١}||$ = ٣ سم في الاتجاه الموجب لمحور السينات.

نرسم $\angle$ أ و ب القطبية حيث و $(\angle$ أ و ب$) = ١٢٠°$

نرسم $||\overrightarrow{ق_٢}||$ = ٤ سم.



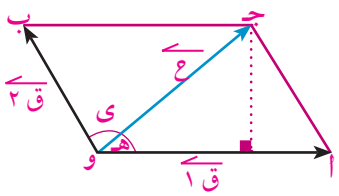
نكمل رسم متوازى الأضلاع و أ جـ ب.
فتكون محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ممثلة بالقطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{و جـ}$.
نحدد باستخدام البرنامج $||\overleftarrow{و جـ}|| \simeq ٣,٦$ سم. أىْ أنَّ ح $\simeq ٣,٦ \times ١٠٠ = ٣٦٠$ نيوتن.

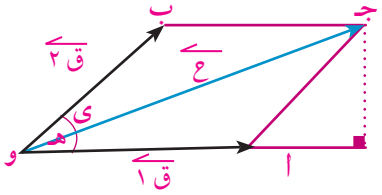
$\overleftarrow{و جـ}$ يصنع مع $\overleftarrow{و أ}$ زاوية قياسها ٥٣° ٥٣′ ٧٣° أىْ أنَّ محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ مقدارها ٣٦٠ نيوتن تقريبًا وتصنع مع $\overleftarrow{ق_1}$ زاوية قياسها ٥٣° ٥٣′ // ٧٣°.

حاول أنْ تحل

(١) استخدم برنامج (*GeoGebra*) فى إيجاد محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ اللتين تؤثران فى نقطة من جسم جاسئ حيث $\overleftarrow{ق_1}$ = ٤٠٠ نيوتن وتعمل في اتجاه الشرق ، $\overleftarrow{ق_2}$ = ٥٠٠ نيوتن وتعمل في اتجاه ٨٠° شمال الشرق.

إيجاد محصلة قوتين متلاقيتين فى نقطة تحليليًا: *The resultant of two force meeting at apoint analytically*





نفرض أنَّ $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ قوتان متلاقيتان فى نقطة (و) وأن قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين (ى) فإذا كان $\overleftarrow{و أ}$ ، $\overleftarrow{و ب}$ تمثلان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ فإن $\overleftarrow{و جـ}$ تمثل المحصلة $\overleftarrow{ع}$ وبفرض أن هـ هو قياس الزاوية التى تصنعها $\overleftarrow{ع}$ مع $\overleftarrow{ق_1}$ فإنه كما سبق فى دراسة قاعدة جيب التمام يمكن إيجاد مقدار واتجاه محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ من العلاقات:

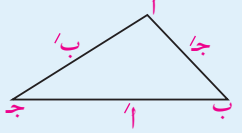
$$ع = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى} \quad ، \quad \text{ظاهـ} = \frac{ق_2 \text{ جا } ى}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا } ى}$$

حيث: ق١ ، ق٢ ، ع مقادير القوى $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ع}$ علي الترتيب

تذكر أن

قاعدة جيب التمام:

في المثلث أ ب جـ يكون:



$أ'^2 = ب'^2 + جـ'^2 - 2 ب' جـ' \text{ جتا } أ$

مثال

(٢) قوتان مقدارهما ٣ ، $٣\sqrt{٢}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية والزاوية بين اتجاهيهما ٤٥°. أوجد مقدار محصلتهما وزاوية ميلها مع القوة الأولى.

الحل

بوضع: $ق_1 = ٣$ ، $ق_2 = ٣\sqrt{٢}$ ، $ى = ٤٥°$

$\therefore ع = \sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{ جتا } ى}$

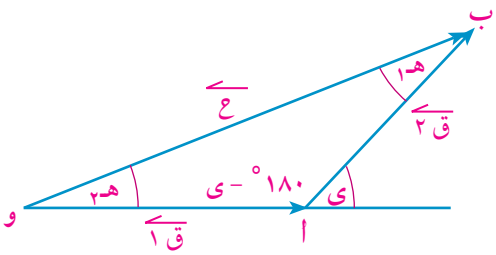
$\therefore ع = \sqrt{(٣)^2 + (٣\sqrt{٢})^2 + 2 \times ٣ \times ٣\sqrt{٢} \text{ جتا } ٤٥°}$

$= \sqrt{٩ + ١٨ + ١٨ \times \frac{١}{\sqrt{٢}}} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ نيوتن

$\therefore \text{ظاهـ} = \frac{ق_2 \text{ جا } ى}{ق_1 + ق_2 \text{ جتا } ى}$ $\therefore \text{ظاهـ} = \frac{٣\sqrt{٢} \times \text{جا } ٤٥°}{٣ + ٣\sqrt{٢} \text{ جتا } ٤٥°} = \frac{١}{٢}$

وباستخدام الآلة الحاسبة فإن: و(∠هـ) = ٥٤″ ٣٣′ ٢٦°

لاحظ أن: الشكل المقابل يُمثِّل المثلث و ا ب
حيث ∠هـ١ هى زاوية ميل خط عمل $\overrightarrow{ق_٢}$ مع المحصلة $\overrightarrow{ع}$ ،
∠هـ٢ هى زاوية ميل خط عمل $\overrightarrow{ق_١}$ مع المحصلة $\overrightarrow{ع}$ باستخدام قاعدة جيب الزاوية.



لاحظ أن: جا (١٨٠° − ى) = جاى

فإن: $\frac{ق_١}{جا هـ_١} = \frac{ق_٢}{جا هـ_٢} = \frac{ح}{جا ى}$ حيث ى = هـ١ + هـ٢

وتستخدم هذه القاعدة لإيجاد زاوية ميل المحصلة على أى من $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$

ففى المثال السابق: لإيجاد زاوية ميل المحصلة مع $\overrightarrow{ق_١}$ نستخدم العلاقة: $\frac{ق_٢}{جا هـ_٢} = \frac{ح}{جا ى}$

∴ $\frac{\sqrt{٣}٢}{جا هـ_٢} = \frac{\sqrt{٣}٥}{جا ٤٥}$

أىْ أنَّ جا هـ٢ = $\frac{\sqrt{٣}٢ \times جا ٤٥°}{\sqrt{٣}٥}$

ومنها فإن زاوية ميل المحصلة مع $\overrightarrow{ق_١}$ تساوى ٥٤″ ٣٣′ ٢٦° وهو نفس الجواب السابق.

حاول أنْ تحل

(٢) قوتان مقدارهما ١٠ ، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بين اتجاهيهما يساوي ٦٠°. أوجد مقدار محصلتهما وزاوية ميلها على القوة الأولى.

تفكير ناقد: أوجد مقدار واتجاه محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فى الحالات الآتية:

١ - إذا كانت القوتان متعامدتين.

٢ - إذا كانت القوتان متساويتين فى المقدار .

مثال

(٣) أوجد مقدار واتجاه المحصلة لكل من $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ فى كل حالة من الحالات الآتية:

أ) ق١ = ٥ نيوتن ، ق٢ = ١٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠°

ب) ق١ = ق٢ = ١٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠°

الحل

أ) ∵ $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ متعامدتان أى و(∠ى) = ٩٠°

فتكون جا ى = ١ ، جتاى = ٠

∴ ع = $\sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢}$ ،

لذلك فإن: ع = $\sqrt{(٥)^٢ + (١٢)^٢}$ = ١٣ نيوتن

ويكون اتجاه المحصلة مع $\overrightarrow{ق_١}$ هو: ظاهـ = $\frac{ق_٢}{ق_١}$

أىْ أنَّ: ظاهـ = $\frac{١٢}{٥}$

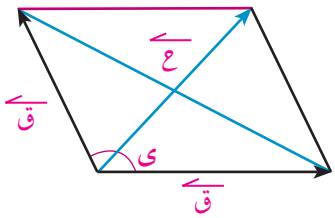
∴ قياس زاوية ميل المحصلة مع $\overrightarrow{ق_١}$ هى ٤٩″ ٢٢′ ٦٧°

لاحظ أنه يمكن استخدام العلاقة: $\frac{\text{ق}_2}{\text{جا هـ}_2} = \text{ح}$ **فتكون** $\frac{12}{\text{جا هـ}_2} = 13$

∴ و (∠ هـ$_2$) = ٦٧° ٢٢′ ٤٩″

ب ∵ ع = $\sqrt{\text{ق}_1^2 + \text{ق}_2^2 + 2\,\text{ق}_1\,\text{ق}_2\,\text{جتا ى}}$ **وبالتعويض عن** ق$_1$ = ق$_2$ = ١٦

∴ ع = $\sqrt{(16)^2 + (16)^2 + 2 \times 16 \times 16\,\text{جتا } 120}$ = ١٦ نيوتن



ونلاحظ من الشكل المرسوم أن: ق$_1$ = ق$_2$ = ع = ١٦ نيوتن وأن المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين المتساويتين، أى أنَّ زاوية ميل المحصلة على أىٍّ من القوتين = ٦٠°

حاول أنْ تحل

(٣) أوجد مقدار واتجاه المحصلة لكل من $\overrightarrow{\text{ق}_1}$ ، $\overrightarrow{\text{ق}_2}$ فى كل حالة من الحالات الآتية:

أ ق$_1$ = ٤,٥ نيوتن ، ق$_2$ = ٦ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٩٠°

ب ق$_1$ = ق$_2$ = ١٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠°

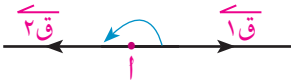
حالات خاصة:

١ - إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفى نفس الاتجاه:



- فى هذه الحالة يكون جتاى = ١ وبالتعويض فى قانون إيجاد المحصلة **نجد أنَّ:** ع = ق$_1$ + ق$_2$ ويكون اتجاه المحصلة فى نفس اتجاه القوتين ، وتسمى ع فى هذه الحالة بالقيمة العظمى للمحصلة.

٢ - إذا كانت القوتان لهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين:



- فى هذه الحالة يكون جتاى = - ١ وبالتعويض فى قانون إيجاد المحصلة نجد أنَّ: ع = |ق$_1$ - ق$_2$| ويكون اتجاه المحصلة يَعمل فى اتجاه القوة الأكبر مقدارًا ، وتسمى ع فى هذه الحالة بالقيمة الصغرى للمحصلة.

مثال: أوجد القيمتين العظمى والصغرى لمحصلة القوتين ٤ ، ٧ نيوتن.

- القيمة العظمى = ٤ + ٧ = ١١ نيوتن وتعمل فى اتجاه القوتين.
- القيمة الصغرى = |٤ − ٧| = ٣ نيوتن وتعمل فى اتجاه القوة ٧ نيوتن.

مثال

(٤) قوتان مقدارهما ق ، ٤ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٤$\sqrt{3}$ نيوتن فأوجد: مقدار $\overrightarrow{\text{ق}}$ وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overrightarrow{\text{ق}_1}$.

الحل

بالتعويض عن: ق$_1$ = ق ، ق$_2$ = ٤ ، ع = ٤$\sqrt{3}$ ، ى = ١٢٠°

فى القانون : ع^2 = ق$_1^2$ + ق$_2^2$ + ٢ ق$_1$ ق$_2$ جتا ى

∴ (٤$\sqrt{3}$)^2 = ق^2 + (٤)^2 + ٢ × ق × ٤ جتا ١٢٠°

∴ ق^{٢} – ٤ق – ٣٢ = ٠ أىْ أنَّ: (ق + ٤) (ق – ٨) = ٠ ومنها ق = ٨ نيوتن

لإيجاد الزاوية بين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ع}$ نستخدم القانون: ظاهـ = $\frac{ق_{٢} \text{ جا ى}}{ق_{١} + ق_{٢} \text{ جتا ى}}$

∴ ظاهـ = $\frac{٤ \times \text{جا } ١٢٠}{٨ + ٤ \times \text{جتا } ١٢٠} = \frac{\sqrt{٣}}{٣}$

أى أن قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{ق_{١}}$ = ٣٠°

حل آخر للجزء الثاني:

لإيجاد الزاوية بين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ع}$ نستخدم قانون الجيب: $\frac{ق_{٢}}{\text{جا هـ}_{٢}} = \frac{ح}{\text{جا ى}}$

∴ $\frac{٤}{\text{جا هـ}_{٢}} = \frac{\sqrt{٣}٤}{\text{جا } ١٢٠}$

جا هـ$_{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ بالاختصار والتبسيط

أىْ أنَّ قياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع $\overleftarrow{ق}$ تساوى ٣٠°

حاول أنْ تحل

(٤) قوتان مقدارهما ٦ ، ق ث كجم تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥°. أوجد مقدار المحصلة إذا كان خط عمل المحصلة يميل بزاوية قياسها ٤٥° على خط عمل القوة التى مقدارها ق.

تعبير شفهى: أوجد محصلة قوتين متساويتين فى المقدار، ولهما نفس خط العمل و يعملان فى اتجاهين متضادين.

تمـاريـن الدرس الأول

أكمل مايأتى:

(١) يتحدد تأثير قوة على جسم بالآتى

(٢) متجه محصلة القوتين $\overleftarrow{ق_{١}}$ ، $\overleftarrow{ق_{٢}}$ يساوى

(٣) القيمة العظمى لمحصلة قوتين مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن متلاقيتان في نقطة يساوى

(٤) القيمة الصغرى لمحصلة قوتين مقدارهما ٥ ، ٩ نيوتن متلاقيتان في نقطة يساوى

(٥) ٢ ، ٣ نيوتن قوتان فإذا كان قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتهما تساوى

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٦) مقدار محصلة القوتان ٣ ، ٥ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° تساوى.

أ ٢ نيوتن ب ٦ نيوتن ج ٧ نيوتن د ٨ نيوتن

(٧) قوتان مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن ومقدار محصلتهما ٥ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما تساوى

أ ٣٠° ب ٤٥° ج ٦٠° د ٩٠°

(٨) قوتان متساويتان، مقدار كلٍّ منهما ٦ نيوتن ومقدار محصلتهما ٦ نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما تساوى

أ ٣٠° ب ٦٠° ج ١٢٠° د ١٥٠°

(٩) قوتان مقدارهما ٣ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى فإن قيمة ق بالنيوتن تساوى:

أ ١,٥ ب ٣ ج $٣\sqrt{٣}$ د ٦

(١٠) إذا كانت القوتان ٦ ، ٨ نيوتن متعامدتان فإن جيب زاوية ميل محصلتهما على القوة الأولى تساوى:

أ $\frac{٣}{٥}$ ب $\frac{٤}{٥}$ ج $\frac{٣}{٤}$ د $\frac{٤}{٣}$

أجب عن الأسئلة الآتية:

(١١) قوتان مقدارهما ٥ ، ١٠ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠°. أوجد مقدار المحصلة وقياس الزاوية التى تصنعها المحصلة مع القوة الأولى.

(١٢) قوتان مقدارهما ٣ ، $٣\sqrt{٢}$ ث. كجم تُؤثِّران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ٤٥° أوجد مقدار واتجاه محصلتهما.

(١٣) قوتان مقدارهما ١٥ ، ٨ ث. كجم تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ١٣ ث. كجم. فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(١٤) قوتان مقدارهما ٨ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، فإذا كان مقدار محصلتهما $ق\sqrt{٣}$ نيوتن فأوجد مقدار ق.

(١٥) قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٣٥° فإذا كان اتجاه محصلتهما يميل بزاوية ٤٥° على ق. أوجد مقدار ق.

(١٦) قوتان مقدارهما ٤ ، ق نيوتن تُؤثِّران فى نقطة مادية وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° ، إذا كانت محصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد مقدار ق.

(١٧) قوتان مقدارهما ق ، $ق\sqrt{٣}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية فإذا كان مقدار محصلتهما يساوى ٢ق نيوتن. فأوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(١٨) قوتان مقدارهما ١٢ ، ١٥ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية وجيب تمام الزاوية بينهما يساوى $-\frac{٤}{٥}$ أوجد مقدار محصلتهما وقياس زاوية ميلها على القوة الأولى.

(١٩) قوتان متساويتان مقدار كلٍّ منهما ق ث. كجم تَحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° وإذا تضاعفت القوتان وأصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° زادت محصلتهما بمقدار ١١ ث. كجم عن الحالة الأولى. أوجد مقدار ق.

(٢٠) قوتان مقدارهما ١٢ ، ق ث. كجم تؤثران فى نقطة ، تعمل الأولى فى اتجاه الشرق وتعمل الثانية فى اتجاه ٦٠°

جنوب الغرب. أوجد مقدار ق ومقدار المحصلة إذا عُلِمَ أنَّ خط عمل المحصلة يؤثر فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق.

(٢١) ق١ ، ق٢ قوتان تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° ومقدار محصلتهما √١٩ نيوتن. وإذا أصبح قياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار المحصلة يساوى ٧ نيوتن. أوجد قيمة كل من ق١ ، ق٢.

(٢٢) قوتان مقدارهما ق ، ٢ق ث. كجم تؤثران فى نقطة ما ، إذا ضُوعِفَ مقدار الثانية وزيد مقدار الأولى ١٥ ث. كجم لا يتغير اتجاه محصلتها. أوجد مقدار ق.

تفكير إبداعى:

(٢٣) قوتان متساويتان فى المقدار ومتلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتهما يساوى ١٢ ث. كجم. وإذا عكس اتجاه إحداهما فإن مقدار المحصلة يساوى ٦ ث. كجم. أوجد مقدار كل من القوتين.

(٢٤) قوتان مقدارهما ك ، ق ومقدار محصلتهما ٢ك إذا كان قياس الزاوية بينهما هـ ، وإذا تغير قياس الزاوية وأصبحت (١٨٠° – هـ) فإن مقدار محصلتهما ينقص إلى النصف. أوجد مقدار كل من ك ، ق.

(٢٥) ق ، ٢ق قوتان تؤثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ى ومقدار محصلتهما يساوى √٥ ق (م + ١) وإذا كان قياس الزاوية بينهما (٩٠° – ى) فإن مقدار المحصلة يساوى √٥ ق (م - ١).

أثبت أن ظا ى = $\frac{م - ٢}{م + ٢}$

نشاط

$\overrightarrow{و_١}$ ، $\overrightarrow{و_٢}$ قوتان متلاقيتان فى نقطة ومقدار محصلتها ع نيوتن ، إذا عكس اتجاه $\overrightarrow{و_١}$ فإن المحصلة تصبح √٢٥ ع نيوتن وفى اتجاه عمودى على المحصلة الأولى. أوجد قياس الزاوية بين القوتين.

١- اعتبر أن قياس الزاوية بين القوتين ى وزاوية ميل المحصلة مع و١ قياسها هـ.

٢- أوجد ظا هـ ثم أوجد ظا (٩٠ - هـ) عند عكس اتجاه و٢

٣- أثبت أنَّ و١ = و٢ = ق من الخطوة السابقة.

٤- أوجد باستخدام قانون مقدار المحصلة محصلة القوتين و١، و٢ قبل وبعد عكس اتجاه و٢.

٥- هل يمكنك استنتاج أنَّ حتا ى = - $\frac{١}{٢}$ لإيجاد قياس الزاوية بين القوتين؟ استنتج ذلك من العلاقات السابقة.

٦- هل لديك طرقا أخرى للحل؟ اذكر إحدى هذه الطرق.

تحليل القوى
Forces resolution

الدرس ٢

سوف تتعلم

- تحليل قوة فى اتجاهين معلومين.
- تحليل قوة فى اتجاهين متعامدين.

المصطلحات الأساسيّة

مركبة قوة	force Component
مثلث قوى	triangle of forces
مركز نقل	centre of gravity

الأدوات والوسائل

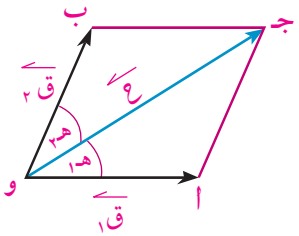
- آلة حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب

تمهيد:

إنَّ تحليل قوة معلومة إلى عِدَّة مركبات بوجه عام يعنى إيجاد مجموعة مؤلَّفة من عِدَّة قوى ، تكون القوة المعلومة هى مُحصلتها، وسنقتصر على دراسة **تحليل قوة فى اتجاهين معلومين.**

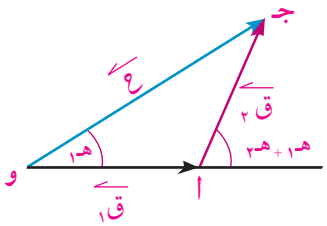
تحليل قوة فى اتجاهين معلومين

Resolution of a force into two components



شكل (١)

يبين شكل (١): متجه المحصلة $\overrightarrow{ح}$ المراد تحليلها إلى مركبتين فى الاتجاهين $\overleftarrow{وا}$ ، $\overrightarrow{وب}$ واللتين تصنعان زاويتين هـ١ ، هـ٢ على الترتيب مع $\overrightarrow{ح}$ ولتكن المركبتان هما: $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$



شكل (٢)

يبين شكل (٢): مثلث القوى مع ملاحظة أن

$\overrightarrow{اجـ} = \overrightarrow{وب}$

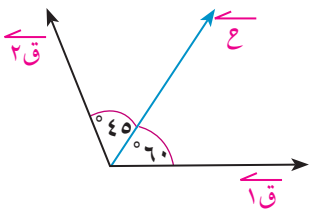
(من خواص متوازى الأضلاع)

وبتطبيق قاعدة الجيب نجد أن:

$$\frac{ق_١}{جا\ هـ_٢} = \frac{ق_٢}{جا\ هـ_١} = \frac{ح}{جا\ (هـ_١ + هـ_٢)}$$

مثال

(١) حلِّل قوة مقدارها ١٢ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين ٦٠° ، ٤٥° فى اتجاهين مختلفين منها.



الحل

بتطبيق قاعدة الجيب:

$$\frac{ق_١}{جا\ ٤٥^\circ} = \frac{ق_٢}{جا\ ٦٠^\circ} = \frac{١٢}{جا\ ١٠٥^\circ}$$

$$\therefore ق_١ = جا\ ٤٥^\circ \times \frac{١٢}{جا\ ١٠٥^\circ} \simeq ٨,٧٨٤٦ \text{ نيوتن}$$

$$ق_٢ = جا\ ٦٠^\circ \times \frac{١٢}{جا\ ١٠٥^\circ} \simeq ١٠,٧٥٨٩ \text{ نيوتن}$$

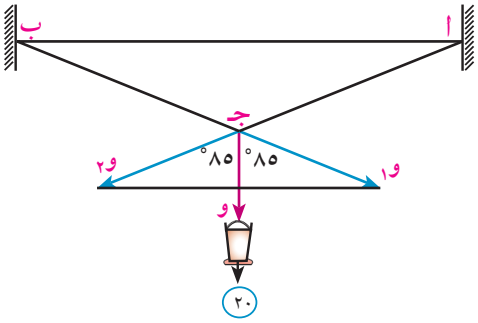
حاول أنْ تحل

(١) حلل قوة مقدارها ٣٦ نيوتن إلى مركبتين تميلان على اتجاه القوة بزاويتين ٣٠° ، ٤٥° في اتجاهين مختلفين منها.

مثال تطبيقات حياتية

(٢) مصباح وزنه ٢٠ نيوتن معلق بحبلين معدنيين $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بجـ}$ يميلان على الأفقي بزاويتين متساويتين قياس كل منهما ٥°.

حلل وزن المصباح في الاتجاهين $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ مقربًا الناتج لأقرب نيوتن.



الحل

نُمثِّل قوة الوزن (٢٠ نيوتن) بمتجه يعمل رأسيًّا لأسفل نقطة بدايته هي النقطة **و**.

نُحلِّل متجه الوزن في اتجاهي الحبلين المعدنيين كما يلي:

$$\frac{و_1}{جا\ ٨٥} = \frac{و_2}{جا\ ٨٥} = \frac{٢٠}{جا\ ١٧٠}$$ أيْ أنه:

$$و_1 = و_2 = ٢٠ \times \frac{جا\ ٨٥}{جا\ ١٧٠}$$ ومن ذلك تكون:

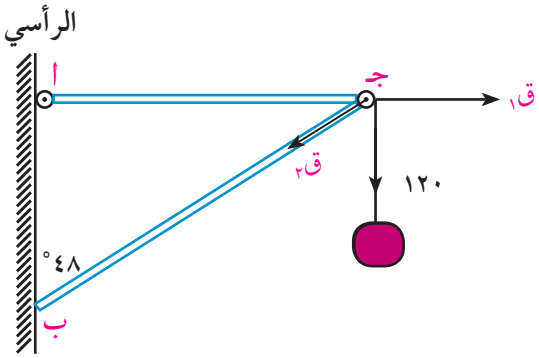
$$و_1 = و_2 = ١١٤,٧٣٧١٣ \simeq ١١٥$$ نيوتن.

تفكير ناقد: ماذا يَحدث لمقدار مركبة الوزن في اتجاهي الحبلين المعدنيين إذا نقص قياس زاويته مع الأفقي عن ٥°؟ وماذا تتوقع لمقدار مركبة الوزن عندما يُصبح الحبل المعدني أفقيًّا؟ **فسِّر إجابتك.**

حاول أنْ تحل

(٢) **الشكل المقابل:**

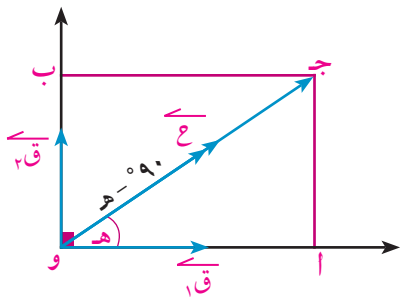
حلِّل القوة الرأسية ١٢٠ث.جم إلى مركبتين إحداهما في الاتجاه الأفقي والأخرى في اتجاه يصنع مع خط عمل القوة زاوية قياسها ٤٨°.



تحليل قوة في اتجاهين متعامدين

Resolution of a force into two perpendicular components

إذا أثرت القوة $\overrightarrow{ع}$ في نقطة مادية (و) كما في الشكل المجاور وكانت مركبتيها المتعامدتين $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ حيث اتجاه $\overrightarrow{ق_1}$ يميل على اتجاه $\overrightarrow{ع}$ بزاوية قياسها هـ ، فإن متوازي الأضلاع يؤول في هذه الحالة إلى المستطيل أجـ ب و ، وبتطبيق قانون الجيب على المثلث وأ جـ فإن:



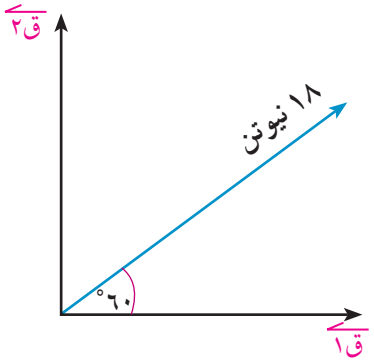
$$\frac{ق_1}{جا\ (٩٠ - هـ)} = \frac{ق_2}{جا\ هـ} = \frac{ح}{جا\ ٩٠}$$ أيْ أنَّ: $$ح = \frac{ق_2}{جا\ هـ} = \frac{ق_1}{جتا\ هـ}$$

ومن ذلك نستنتج أنَّ:

- $ق_1$ (مقدار المركبة فى اتجاه معلوم) = ع جتا هـ
- $ق_2$ (مقدار المركبة فى الاتجاه العمودى على الاتجاه المعلوم) = ع جا هـ

مثال

(٣) حلل قوة مقدارها ١٨ نيوتن فى اتجاهين متعامدين إحداهما تصنع مع القوة زاوية قياسها ٦٠



الحل

$ق_1$ = ١٨ جتا ٦٠° = $\frac{1}{2}$ × ١٨ = ٩ نيوتن

$ق_2$ = ١٨ جا ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × ١٨ = ٩$\sqrt{3}$ نيوتن.

حاول أنْ تحل

(٣) حَلِّل قوة مقدارها ٦$\sqrt{2}$ والتى تعمل فى اتجاه الشمال الشرقى إلى مركبتين إحداهما فى اتجاه الشرق والأخرى فى اتجاه الشمال.

المستوى المائل *Inclined Plane*

المستوى المائل هو سطح يميل على الأفقى بزاوية معلومة، كما هو موضح بالشكل

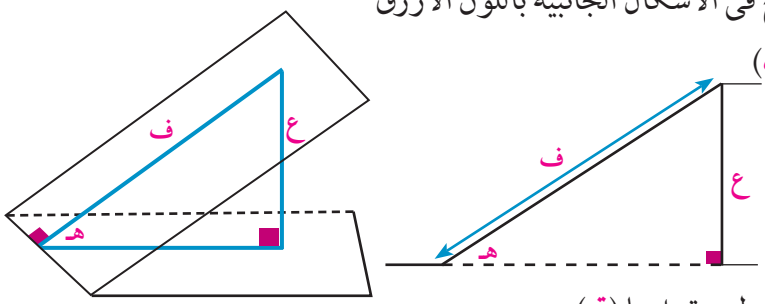
وخط **أكبر ميل للمستوى** هو الخط الموضَّح فى الأشكال الجانبية باللون الأزرق

و إذا رمزنا لطول خط أكبر ميل بالمسافة (ف)

وارتفاع السطح المائل بالمسافة (ع) ،

زاوية ميل المستوى على الأفقى بالرمز (هـ)

فإن جاهـ = $\frac{ع}{ف}$.



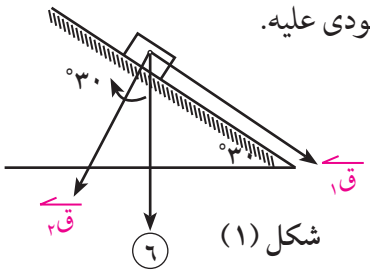
ولرفع جسم وزنه (و) نَستخدم قوة موازية للسطح مقدارها (ق).

و يستخدم السطح المائل لتقليل الجهد اللازم لرفع الأجسام، حيث إنّ (ق) تكون دائمًا أقل من وزن الجسم، كما يَتضح من المثال الآتى:

مثال

(٤) وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠°.
أوجد مركبتى وزن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

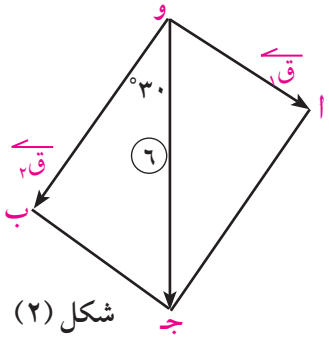
الحل



شكل (١)

شكل (١): يبين قوة وزن الجسم ٦ نيوتن وتؤثر رأسيًّا إلى أسفل ، مركبة وزن الجسم $ق_1$ تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى ولأسفل ، والمركبة الأخرى $ق_2$ وتعمل فى الاتجاه العمودى للمستوى ولأسفل.

شكل (٢): يُبين تَمثيل القوى الثلاث بمتوازى أضلاع القوى و أ جـ ب.
(لاحظ أن الشكل مستطيل).



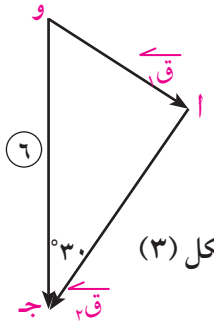
شكل (٢)

شكل (٣): يبين مثلث القوى و أ جـ
وبتطبيق قاعدة الجيب:

$$\frac{ق_1}{جا\ ٣٠} = \frac{ق_2}{جا\ ٦٠} = ٦$$

أىْ أنَّ: $ق_1 = ٦\ جا\ ٣٠ = ٣$ نيوتن ،

$ق_2 = ٦\ جتا\ ٣٠ = ٣\sqrt{٣}$ نيوتن.



شكل (٣)

تعبير شفهى: هل مركبتى القوة $\overleftarrow{ق}$ أقل من القوة $\overleftarrow{ق}$ نفسها ؟ فسر إجابتك.

حاول أنْ تحل

(٤) جسم جاسىء مقدار وزنه ٣٦ نيوتن موضوع على مستو يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°. أوجد مركبتى الوزن فى اتجاه موازى للمستوى لأسفل والاتجاه العمودى عليه.

أضف إلى معلوماتك

مركز ثقل الجسم الجاسئ

هى النقطة التى يمر بها دائمًا الخط الرأسى المار بنقطة التعليق عندما يعلق الجسم من أى نقطه عليه فعلى سبيل المثال.

(١) مركز ثقل جسم كروى منتظم ومتجانس هى النقطة التى يقع فيها مركز هذا الجسم.

(٢) مركز ثقل قضيب منتظم السمك والكثافة هو منتصف هذا القضيب.

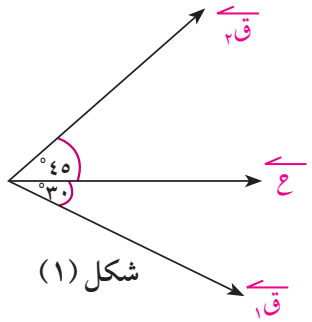
تمـــارين الدرس الثانى

أكمل مايأتى:

(١) قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال تم تحليلها الي مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشرق تُساوى نيوتن.

(٢) قوة مقدارها $٢\sqrt{٤}$ نيوتن تعمل فى اتجاه الشرق تم تحليلها الي مركبتين متعامدتين فإن مركبتها فى اتجاه الشمال الشرقى تساوى نيوتن.

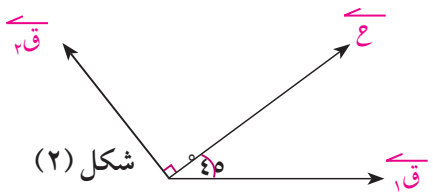
(٣) فى شكل (١):



شكل (١)

أ إذا حلَّلت القوة $\overleftarrow{ع}$ إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٣٠° ، ٤٥° من جهتيها وكان $||\overleftarrow{ع}|| = ١٢$ نيوتن ،
فإن: $ق_1$ = ... نيوتن ، $ق_2$ = ... نيوتن.

(٤) فى شكل (٢):



شكل (٢)

أ إذا حللت القوة $\overleftarrow{ع}$ إلى مركبتين $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ اللتين تصنعان معها زاويتين قياساهما ٤٥° ، ٩٠° من كلتا جهتيها وكان

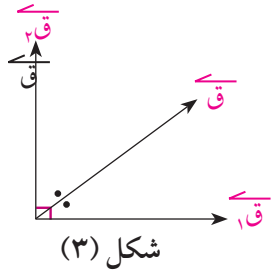
$||\overleftarrow{ع}|| = ١٨$ نيوتن ، فإن: $ق_1$ = ... نيوتن ، $ق_2$ = ... نيوتن

(٥) فى شكل (٣):

أ إذا حلِّلت القوة $\overrightarrow{ق}$ إلى مركبتين متعامدتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ وكان متجه القوة ينصف الزاوية بين اتجاهى $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ وكان $||\overrightarrow{ق}|| = ٦\sqrt{٢}$ ث كجم

فإن: $||\overrightarrow{ق_١}|| =$ ث كجم ،

$||\overrightarrow{ق_٢}|| =$ ث كجم.

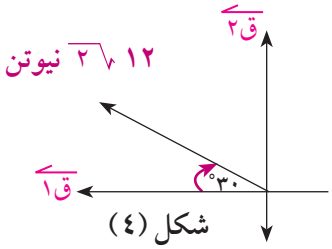


شكل (٣)

(٦) فى شكل (٤):

أ قوة مقدارها $١٢\sqrt{٢}$ نيوتن تعمل فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب.

- مقدار مركبة القوة فى اتجاه الغرب = ... نيوتن.
- مقدار مركبة القوة فى اتجاه الشمال = ... نيوتن.



شكل (٤)

(٧) قوة مقدارها ٦٠٠ ث جم تؤثِّر فى نقطة مادية. أوجد مركبتيها فى اتجاهين يصنعان معها زاويتين ٣٠° ، ٤٥°.

(٨) قوة مقدارها ١٢٠ نيوتن تَعمل فى اتجاهِ الشمال الشرقى. أوجد مركبتيها فى اتجاه الشرق واتجاه الشمال.

(٩) حلِّل قوة أفقية مقدارها ١٦٠ ث جم فى اتجاهين متعامدين أحدهما يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° إلى أعلى.

(١٠) قوة مقدارها ١٨ نيوتن تَعمل فى اتجاهِ الجنوب. أوجد مركبتيها فى اتجاهى ٦٠° شرق الجنوب، والأخرى فى اتجاه ٣٠° غرب الجنوب.

(١١) جسم جاسىء وزنه ٤٢ نيوتن موضوع على مستو يَميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠°. أوجد مركبتى وزن هذا الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.

تفكير إبداعى:

(١٢) مستوى مائل طوله ١٣٠ سم وارتفاعه ٥٠ سم وضع عليه جسم جاسىء وزنه ٣٩٠ ث جم. أوجد مركبتى الوزن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى والاتجاه العمودى عليه.



الدرس ٣

محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة

The resultant of coplanar forces meeting at a point

سبق أن درست إيجاد محصلة قوتين مؤثِّرتين على جسم جاسئ فى نقطة واحدة، حيث مُثلت هندسيًّا بقطر متوازى الأضلاع المرسوم بهاتين القوتين كضلعين متجاورين فيه.

فهل يمكنك إيجاد محصلة عِدَّة قوى متلاقية فى نقطة واحدة هندسيًّا؟

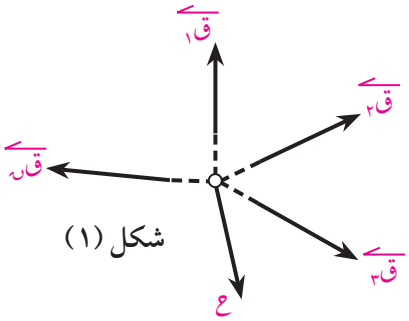
محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة هندسيًّا:

إذا أثرت مجموعة القوى $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ، ، $\overrightarrow{ق_ن}$ في نقطة مادية كما فى شكل (١) فيُمكِن تَمثيلها بمضلَّع مُقفل، وذلك باستخدام مقياس رسم مناسب

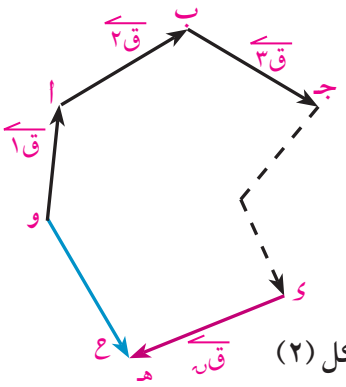
ونرسم المتجه $\overrightarrow{و أ}$ الذى يمثل $\overrightarrow{ق_1}$

ثم نرسم $\overrightarrow{أ ب}$ الذى يمثل $\overrightarrow{ق_2}$

ثم نرسم $\overrightarrow{ب جـ}$ الذى يمثل $\overrightarrow{ق_3}$ وهكذا..... حتى نصل إلى نهاية المتجه $\overrightarrow{ق_ن}$ وذلك برسم $\overrightarrow{ء هـ}$.



شكل (١)



شكل (٢)

المتجه $\overrightarrow{و هـ}$ الذى يعمل فى الاتجاه الدورى المضاد يُمثِّل محصلة القوى المعطاة، حيث:

$$\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق_1} + \overrightarrow{ق_2} + \overrightarrow{ق_3} + ... + \overrightarrow{ق_ن}$$

ويسمى هذا المضلع بمضلع القوى ومن السهل ملاحظة أن تكوين مضلَّع قوى ما هو إلا تطبيق لقاعدة مثلث القوى عدة مرات متتالية.

مثال

استخدام برنامج (GeoGebra)

(١) $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ، $\overrightarrow{ق_4}$ أربع قوى تؤثر فى نقطة من جسم جاسئ ، حيث ق١ = ٤٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشرق ، ق٢ = ٣٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشمال ، ق٣ = ٥٠٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه الشمال الغربى ، ق٤ = ٢٠٠ نيوتن وتعمل بزاوية قياسها ٣٠° جنوب الغرب. أوجد محصلة هذه القوى.

سوف تتعلم

- محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة هندسية.
- محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة تحليليا.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- محصلة. Resultant
- مركبة جبرية. Algebraic component
- متجه وحدة. Unit vector

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب

الحل

استخدام برنامج (geogebra)

نرسم القطع المستقيمة الموجهة التى تُمثِّل القوى بمقياس رسم ١ : ١٠٠

فنرسم من نقطة الأصل المتجه $\overrightarrow{أب}$ الذي طوله ٤ وحدات فى اتجاه الشرق.

ثم نرسم من نقطة ب المتجه $\overrightarrow{ب جـ}$ الذي طوله ٣ وحدات فى اتجاه الشمال.

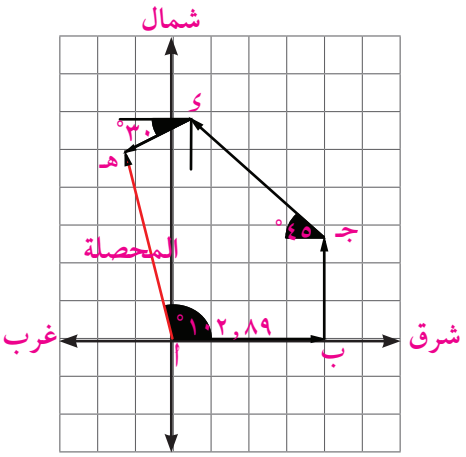
ثم نرسم من نقطة جـ المتجه $\overrightarrow{جـ ء}$ الذي طوله ٥ وحدات فى اتجاه الشمال الغربى.

ثم نرسم من ء المتجه $\overrightarrow{ء هـ}$ الذي طوله ٢ وحدة فى اتجاه ٣٠° جنوب الغرب.

فيكون المتجه $\overrightarrow{أهـ}$ يعبر عن المحصلة.

من الرسم $|| \overrightarrow{أهـ} ||$ = ٥,٦٨ وحدة طول.

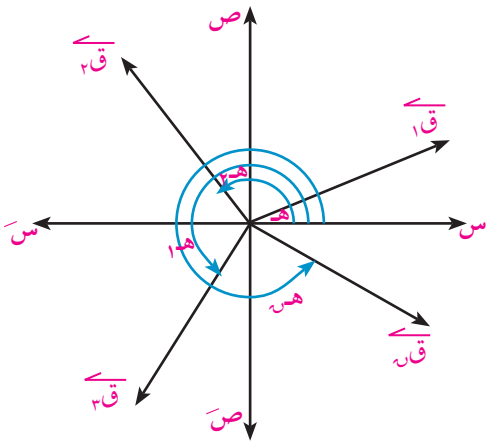
مقدار المحصلة = ٥,٦٨ × ١٠٠ = ٥٦٨ نيوتن ، وتصنع المحصلة مع الشرق زاوية قياسها ١٠٢,٨٩°



محصلة عدة قوى مستوية متلاقية فى نقطة تحليليًّا

The resultant of coplanar forces meeting at apoint analytically

إذا أثرت القوى $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ ،..... ، $\overrightarrow{ق_ن}$ المستوية والمتلاقية فى نقطة وفى نظام إحداثى متعامد، وكانت تصنع الزوايا القطبية التى قياساتها هـ$_١$ ، هـ$_٢$ ، هـ$_٣$ ، ، هـ$_ن$ وكانت $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ هما متجها الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{و س}$ ، $\overrightarrow{و ص}$ فإن: $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ق_١} + \overrightarrow{ق_٢} + \overrightarrow{ق_٣} + ... + \overrightarrow{ق_ن}$



وبتحليل كل قوة فى اتجاهى $\overrightarrow{و س}$ ، $\overrightarrow{و ص}$ المتعامدين فإن:

$\overrightarrow{ع}$ = (ق$_١$ حتا هـ$_١$ $\overrightarrow{س}$ ، ق$_١$ حا هـ$_١$ $\overrightarrow{ص}$)

+ (ق$_٢$ حتا هـ$_٢$ $\overrightarrow{س}$ ، ق$_٢$ حا هـ$_٢$ $\overrightarrow{ص}$)

+ + (ق$_ن$ حتا هـ$_ن$ $\overrightarrow{س}$ ، ق$_ن$ حا هـ$_ن$ $\overrightarrow{ص}$)

$\overrightarrow{ع}$ = (ق$_١$ حتا هـ$_١$ + ق$_٢$ حتا هـ$_٢$ + ... + ق$_ن$ حتا هـ$_ن$) $\overrightarrow{س}$

+ (ق$_١$ حا هـ$_١$ + ق$_٢$ حا هـ$_٢$ + ... + ق$_ن$ حا هـ$_ن$) $\overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ع}$ = ($\sum_{ر=١}^{ن}$ ق$_ر$ حتا هـ$_ر$) $\overrightarrow{س}$ + ($\sum_{ر=١}^{ن}$ ق$_ر$ حا هـ$_ر$) $\overrightarrow{ص}$

- **يسمى المقدار:** $\sum_{ر=١}^{ن}$ ق$_ر$ حتا هـ$_ر$ بالمجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overrightarrow{و س}$ ويرمز له بالرمز س.
- **يسمى المقدار:** $\sum_{ر=١}^{ن}$ ق$_ر$ حا هـ$_ر$ بالمجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overrightarrow{و ص}$ ويرمز له بالرمز ص.

ومن ذلك نكتب $\overrightarrow{ع} = س \overrightarrow{سَ} + ص \overrightarrow{صَ}$

وتكون ح معيار المحصلة ، هـ هى قياس الزاوية القطبية لها

أىْ أنَّ: $ع = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، ظا هـ $= \frac{ص}{س}$

تذكر أن

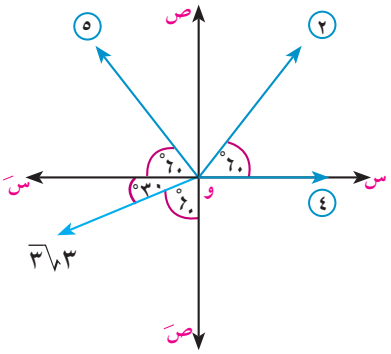
يسمى الرمز Σ (سيجما) برمز التجميع والعبارة $\sum_{ر=١}^{ن}$ مجموع ن عنصرًا بدأ من العنصر الأول.

مثال

(٢) أربع قوى مستوية تؤثر فى نقطة مادية. الأولى مقدارها ٤ نيوتن وتؤثر فى اتجاه الشرق والثانية مقدارها ٢ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق والثالثة مقدارها ٥ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٦٠° شمال الغرب والرابعة $٣\sqrt{٣}$ نيوتن وتؤثر فى اتجاه ٦٠° غرب الجنوب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل

القوى ٤ ، ٢ ، ٥ ، $٣\sqrt{٣}$ نيوتن قياس زواياها القطبية هى ٠° ، ٦٠° ، ١٢٠° ، ٢١٠° على الترتيب نوجد المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$



س = ٤ حتا٠° + ٢ حتا ٦٠° + ٥ حتا ١٢٠° + $٣\sqrt{٣}$ حتا ٢١٠°

$= ٤ + ٢ \times \frac{١}{٢} - ٥ \times \frac{١}{٢} - ٣\sqrt{٣} \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} = ٤ + ١ - \frac{٥}{٢} - \frac{٩}{٢} = -٢$

ص = ٤ جا٠° + ٢ جا ٦٠° + ٥ جا ١٢٠° + $٣\sqrt{٣}$ جا ٢١٠°

$= ٠ + ٢ \times \frac{٣\sqrt{٣}}{٢} + ٥ \times \frac{١}{٢} - ٣\sqrt{٣} \times \frac{١}{٢}$

$= ٣\sqrt{٣} + \frac{٥}{٢} ٣\sqrt{٣} - \frac{٣}{٢} ٣\sqrt{٣} = ٣\sqrt{٢}$

∴ $\overrightarrow{ع} = -٢ \overrightarrow{س} + ٣\sqrt{٢} \overrightarrow{ص}$

ظا هـ $= \frac{ص}{س} = \frac{٣\sqrt{٢}}{-٢} = -٣\sqrt{٢}$

∵ س < ٠ ، ص > ٠

∴ هـ = ١٢٠°

ويكون ع $= \sqrt{س^٢ + ص^٢} = \sqrt{٤ + ١٢} = \sqrt{١٦} = ٤$ نيوتن

أىْ أنَّ مقدار محصلة القوى يُساوى ٤ نيوتن وتصنع زاوية قطبية قياسها ١٢٠°

حاول أنْ تحل

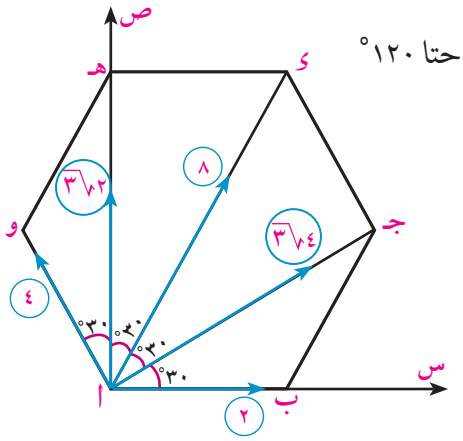
(١) تؤثِّر القوى المستوية التى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، $٣٠\sqrt{٣}$ ، ٤٠ نيوتن فى نقطة، بحيث كانت الزاوية بين اتجاهى القوتين الأولى والثانية ٦٠° وبين اتجاهى القوتين الثانية والثالثة ٩٠° وبين اتجاهى القوتين الثالثة والرابعة ١٥٠°. أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

مثال

(٣) أ ب جـ ء هـ و شكل سداسى منتظم تؤثر القوى التى مقاديرها ٢ ، $٤\sqrt{٣}$ ، ٨ ، $٢\sqrt{٣}$ ، ٤ ث كجم فى نقطة أ فى الاتجاهات $\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{أجـ}$ ، $\overrightarrow{أء}$ ، $\overrightarrow{أهـ}$ ، $\overrightarrow{أو}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

الحل

باعتبار $\overleftarrow{أب}$ هو اتجاه القوة الأولى فتكون الزوايا القطبية للقوى هى: ٠° ، ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° ، ١٢٠° على الترتيب.



∴ س = ٢ حتا ٠° + ٣√٤ حتا ٣٠° + ٨ حتا ٦٠° + ٣√٢ حتا ٩٠° + ٤ حتا ١٢٠°

$= ٢ + ٣\sqrt{٤} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٨ \times \frac{١}{٢} + ٣\sqrt{٢} \times ٠ - ٤ \times \frac{١}{٢}$

= ٢ + ٦ + ٤ - ٢ = ١٠ نيوتن

ص = ٢ حا ٠° + ٣√٤ حا ٣٠° + ٨ حا ٦٠°

+ ٣√٢ حا ٩٠° + ٤ حا ١٢٠°

$= ٠ + ٣\sqrt{٤} \times \frac{١}{٢} + ٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٣\sqrt{٢} \times ٤ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

= ٣√٢ + ٣√٤ + ٣√٢ = ٣√١٠ نيوتن

∴ ع = $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ = $\sqrt{(١٠)^٢ + (٣\sqrt{١٠})^٢}$ = ٢٠ نيوتن

ظا هـ = $\frac{ص}{س} = \frac{٣\sqrt{١٠}}{١٠} = ٣\sqrt{}$

∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ ق(∠ هـ) = ٦٠°

أيْ أنَّ المحصلة تعمل في اتجاه $\overrightarrow{أك}$

تمـــاريـن (أ - ٣)

أكمل مايأتى:

(١) إذا كانت القوى $ق_١$ = ٢ $سـ$ ، $ق_٢$ = $سـ$ - ٢ $صـ$ ، $ق_٣$ = ٦ $صـ$ فإن:

مقدار محصلة القوى = ... واتجاهها = ...

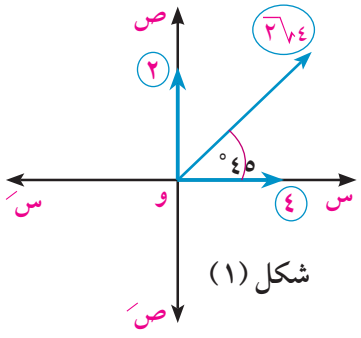
(٢) إذا كانت القوى $ق_١$ = ٢ $سـ$ - ٢ $صـ$ ، $ق_٢$ = ٤ $سـ$ - ٨ $صـ$ ، $ع$ = ٢ أ $سـ$ - ٣ب $صـ$

فإن: أ = ... ، ب = ...

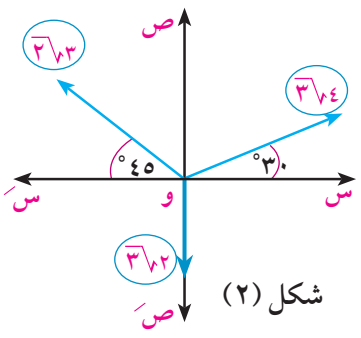
(٣) إذا كان $ق_١$ = ٣ $سـ$ - ٢ $صـ$ ، $ق_٢$ = أ $سـ$ - $صـ$ ، $ق_٣$ = ٤ $سـ$ - ب $صـ$ ، $ع$ = ٦ $سـ$ - ٤ $صـ$

فإن: أ = ... ، ب = ...

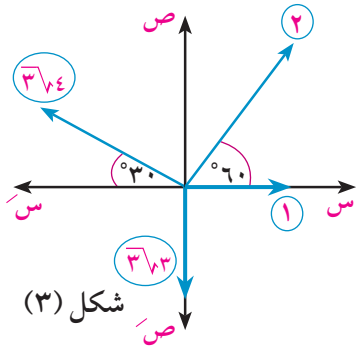
(٤) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى المبينة فى كل شكل من الأشكال الآتية:



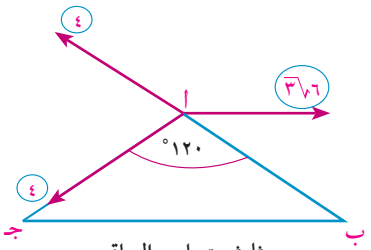
شكل (١)



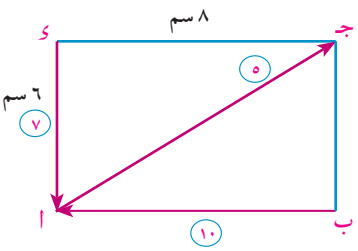
شكل (٢)



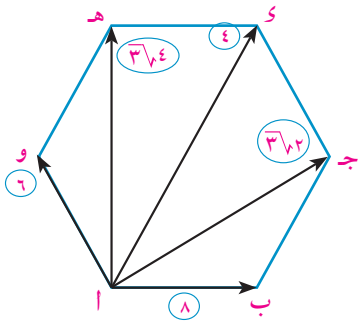
شكل (٣)



مثلث متساوى الساقين
شكل (٤)



مستطيل بعداه ٦سم ، ٨سم
شكل (٥)



سداسى منتظم
شكل (٦)

(٥) أثرت القوى ٣ ، ٦ ، ٣√٩ ، ١٢ ث كجم فى نقطة مادية وكان قياس الزاوية بين الأولى والثانية ٦٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° وبين الثالثة والرابعة ١٥٠°. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى

(٦) ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن تؤثِّر فى نقطة مادية الأولى نحو الشرق والثانية تصنع زاوية ٣٠° غرب الشمال والثالثة تصنع ٦٠° جنوب الغرب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٧) أربع قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠√٣ ، ٤٠ ث جم تؤثِّر فى نقطة مادية الأولى تؤثر فى اتجاه الشرق والثانية تؤثر فى اتجاه ٦٠° شمال الشرق والثالثة تؤثِّر فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب والرابعة تؤثِّر فى اتجاهٍ يصنع ٦٠° جنوب الشرق. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

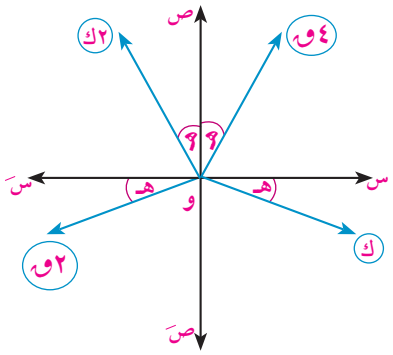
(٨) ا ب جـ مثلث متساوى الأضلاع ، م نقطة تَلاقى متوسطاته أثرت القوى التى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن فى نقطة مادية فى الاتجاهات $\overleftarrow{م جـ}$ ، $\overleftarrow{م ب}$ ، $\overleftarrow{م ا}$. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٩) ا ب جـ ء مربع طول ضلعه ١٢سم ، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث ب هـ = ٥سم. أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ١٣ ، ٢√٤ ، ٩ ث جم فى الاتجاهات $\overleftarrow{ا ب}$ ، $\overleftarrow{ا هـ}$ ، $\overleftarrow{جـ ا}$ ، $\overleftarrow{ا ء}$ على الترتيب. أوجد محصلة هذه القوى.

تفكير إبداعى:

(١٠) إذا كانت $\overrightarrow{ق_١}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = أ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = -١٤ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ ثلاث قوى مستوية ومتلاقية في نقطة وكانت المحصلة $\overrightarrow{ع}$ = (٢√١٠ ، ١٣٥°). أوجد قيمتي أ ، ب.

(١١) **الشكل المقابل**: يبين أربع قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة (و) فى الاتجاهات الموضحة حيث حا هـ = $\frac{٤}{٥}$ وكانت محصلة هذه القوى تساوى ٢√٨ نيوتن وتصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع $\overleftarrow{و س}$ أوجد قيمتى ق ، ك.





اتزان جسيم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة

Equilibrium of a particle under the action of coplanar forces meeting at a point

سوف تتعلم

- اتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة.
- اتزان جسم تحت تأثير قوتين.
- اتزان جسم تحت تأثير ثلاث قوى سنوية ومتلاقية فى نقطة.
- قاعدة مثلث القوى.
- قاعدة لاجا.
- نظرية القوى الثلاث.

المصطلحات الأساسيّة

- قاعدة مثلث القوى. Triangle of forces rule
- قاعدة لامى. Lami`s rule
- مضلع القوى. Triangle

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية Scientific calculator
- برامج رسومية للحاسوب.

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

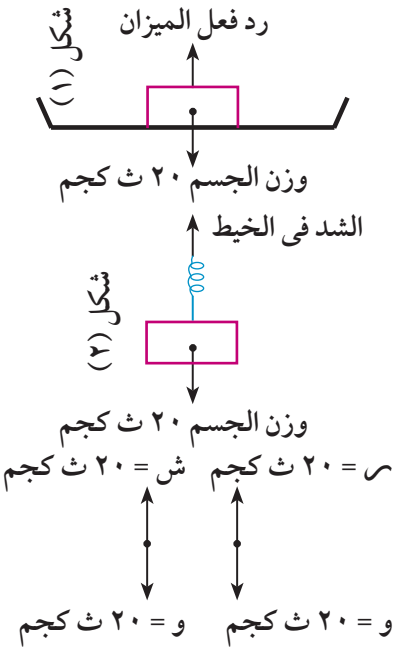
Equilibrium of a rigid body under the action of two forces

عمل تعاونى

١- ضع جسمًا وزنة ٢٠ ث كجم على كفة ميزان ضغط أفقى ملساء ولاحظ قراءة الميزان حينئذ. كما فى الشكل (١).

٢- اطلب من زميلك أن يربط نفس الجسم بخيط خفيف أملس ويربط نهاية الخيط فى خطاف ميزان زمبركى، ويلاحظ قراءة الميزان فى وضع السكون.

٣- قارن بين النتائج فى كل من التجربتين ماذا تلاحظ؟



نلاحظ أن:

- كل من قوتى رد الفعل ر فى التجربة الأولى وقوة الشد فى الخيط فى التجربة الثانية تساوى ٢٠ ث كجم وهو وزن الجسم.

شروط اتزان جسم جاسئ تحت تأثير قوتين

يتزن الجسم الجاسىء تحت تأثير قوتين فقط إذا كانت القوتان:

١- متساويتين فى المقدار. ٢- متضادتين فى الاتجاه. ٣- خطا عملهما على استقامة واحدة

مثال

(٤) إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع قوتان مقدارهما ٥ ، ٣ نيوتن واللتان تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° فأوجد قيمة ق؟

الحل

نوجد محصلة القوتان ٥ ، ٣ نيوتن من القانون:

ع = $\sqrt{ق_1^2 + ق_2^2 + 2 ق_1 ق_2 \text{جتا} ى}$ ∴ ع = $\sqrt{٢٥ + ٩ + ٢ \times ٥ \times ٣ \text{ جتا } ٦٠°}$

∴ ع = $\sqrt{٢٥ + ٩ + ١٥}$ = $\sqrt{٤٩}$ = ٧ نيوتن

∵ القوة (ق) ومحصلة القوتان ٥ ، ٣ نيوتن فى حالة اتزان. ∴ ق = ٧ نيوتن

حاول أنْ تحل

(١) إذا كانت القوة التى مقدارها ق تتزن مع القوتين المتعامدتين التى مقدار كل منها ٥ ، ١٢ نيوتن فأوجد قيمة ق.

اتزان جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة

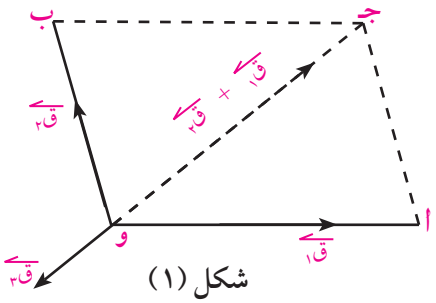
Equilibrium of arigid body under the action of three coplanar forces meeting at apoint

سبق وأن درست الشرط اللازم والكافى لاتزان جسم جاسئ تحت تأثير عدة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة، وعلمت أنه يمثل بمضلع مقفل، كذلك يمكن تَمثيل ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة ومتزنة بأضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد.

قاعدة مثلث القوى *Triangle of forces*

شكل (١): يمثل القوتان $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ تؤثران على جسم جاسىء تعملان فى $\overleftarrow{و\,ا}$ ، $\overleftarrow{و\,ب}$

وتكون محصلة هاتين القوتين هي ($\overleftarrow{ق_1}$ + $\overleftarrow{ق_2}$) والتى تعمل فى القطر $\overleftarrow{و\,جـ}$ من متوازى الأضلاع و ا جـ ب.



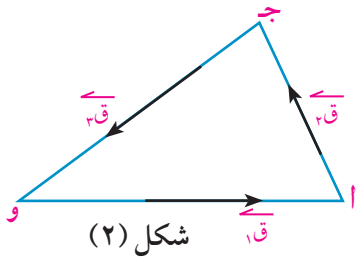
شكل (١)

$\overleftarrow{ق_3}$ تساوى ($\overleftarrow{ق_1}$ + $\overleftarrow{ق_2}$) فى المقدار وتضادهما فى الاتجاه

أىْ أنَّ: $\overleftarrow{ق_1} + \overleftarrow{ق_2} + \overleftarrow{ق_3} = \overleftarrow{٠}$ ∴ $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$ مجموعة متزنة.

شكل (٢): يمثل مثلث القوى للمجموعة المتزنة $\overleftarrow{ق_1}$ ، $\overleftarrow{ق_2}$ ، $\overleftarrow{ق_3}$

حيث إن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المتناظرة.



شكل (٢)

أىْ أنَّ: $\frac{ق_1}{و\,ا} = \frac{ق_2}{ا\,جـ} = \frac{ق_3}{جـ\,و}$

مثال

(٥) عُلِّقَ ثقلٌ مقداره ١٢ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف طوله ١٣٠سم والطرف الآخر للخيط مثبت فى نقطة على حائط رأسي. جذب الجسم بتأثير قوة أفقية حتى اتزن وهو على بعد ٥٠سم من الحائط. أوجد مقدار كل من القوة والشد فى الخيط.

الحل

الثقل متزن تحت تأثير القوى الثلاث:

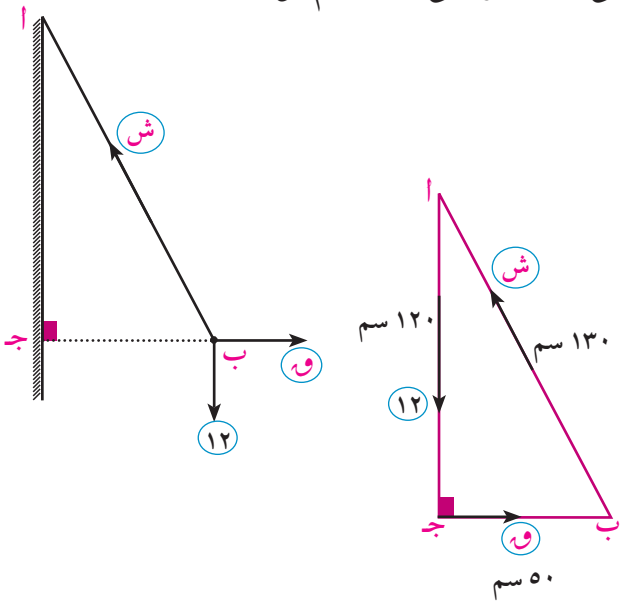
- قوة الوزن (١٢ نيوتن) وتعمل رأسيًّا لأسفل.
- القوة الأفقية ق.
- الشد فى الخيط ش ويعمل في $\overleftarrow{ب\,ا}$

نوجد طول $\overline{ا\,جـ}$ من فيثاغورث.

ا جـ = $\sqrt{(١٣٠)^٢ - (٥٠)^٢}$ = ١٢٠ سم

المثلث ب ا جـ مثلث القوى:

$\frac{ش}{١٣٠} = \frac{١٢}{١٢٠} = \frac{ق}{٥٠}$

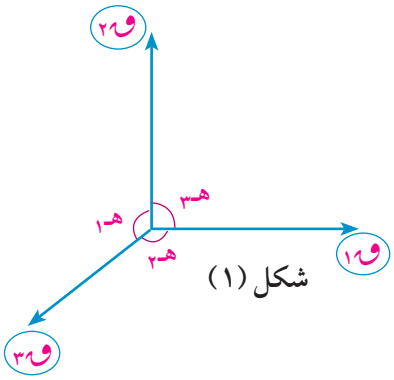


ش = ١٣ نيوتن ، ق = ٥ نيوتن

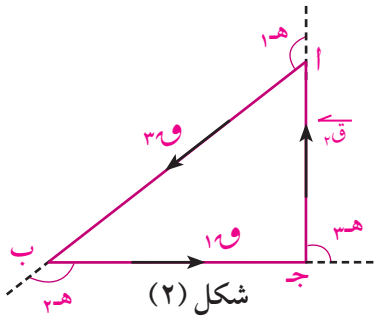
حاول أنْ تحل

(٢) علق ثقل مقداره ١٦ نيوتن فى أحد طرفى خيط خفيف مثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى ، أزيح الثقل بقوة فى اتجاه عمودى على الخيط حتى أصبح الخيط فى وضع التوازن يميل على الحائط بزاوية قياسها ٣٠° . أوجد مقدار القوة والشد فى الخيط.

قاعدة لامى *lami's theorem*



شكل (١)



شكل (٢)

باستخدام قاعدة الجيب نجد أن:

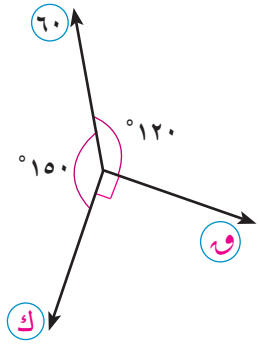
$$\frac{\text{ب جـ}}{\text{حا}(١٨٠ - \text{هـ}_١)} = \frac{\text{جـ ا}}{\text{حا}(١٨٠ - \text{هـ}_٢)} = \frac{\text{ا ب}}{\text{حا}(١٨٠ - \text{هـ}_٣)}$$

أىْ أنَّ $\frac{\text{ق}_١}{\text{حا هـ}_١} = \frac{\text{ق}_٢}{\text{حا هـ}_٢} = \frac{\text{ق}_٣}{\text{حا هـ}_٣}$

أىْ أنَّ: مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين عندما تكون القوى الثلاث متزنة ومتلاقية فى نقطة.

مثال

(٦) ثلاث قوى مقاديرها ٦٠ ، ق ، ك نيوتن متزنة ومتلاقية فى نقطة فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية ١٢٠° وبين الثانية والثالثة ٩٠° . فأوجد مقدار كل من ق ، ك.



الحل

المجموعة متزنة تحت تأثير القوى الثلاث الآتية:

القوة ٦٠ نيوتن ، القوة ق نيوتن ، القوة ك نيوتن بتطبيق قاعدة لامى:

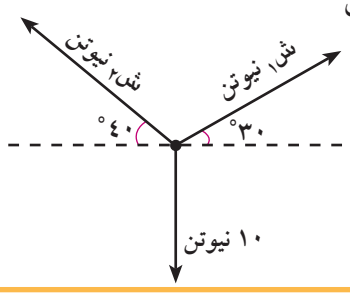
$$\frac{٦٠}{\text{حا}\,٩٠^\circ} = \frac{\text{ق}}{\text{حا}\,١٥٠^\circ} = \frac{\text{ك}}{\text{حا}\,١٢٠^\circ}$$

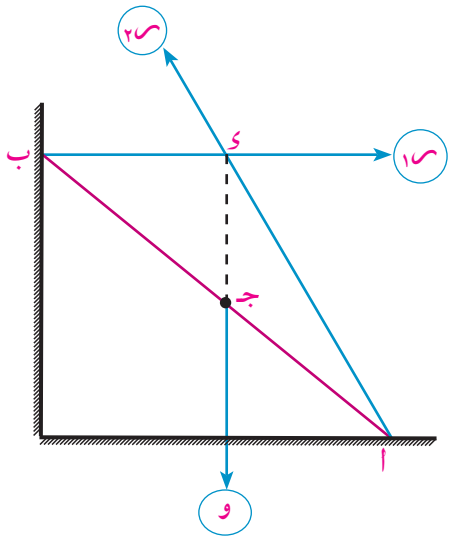
$$\frac{٦٠}{١} = ٢\text{ق} = \frac{٢\text{ك}}{\sqrt{٣}}$$

أىْ أنَّ: ق = ٣٠ نيوتن ، ك = ٣٠$\sqrt{٣}$ نيوتن

حاول أنْ تحل

(٣) فى الشكل المقابل ثقل مقداره ١٠ نيوتن معلق بخيطين يميل الأول على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° ويميل الأخر على الأفقى بزاوية قياسها ٤٠° . أوجد $\text{ش}_١$ ، $\text{ش}_٢$ فى حالة الاتزان.





نظرية القوى الثلاث:

إذا اتزن جسم جاسئ تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى تتلاقى فى نقطة واحدة.

مثال: إذا اتزن قضيب منتظم السمك والكثافة وزنه (و) على حائط رأسى أملس وأرض أفقية خشنة فإن:

- مركز ثقل وزن القضيب يعمل فى منتصفه واتجاهه رأسيًّا لأسفل.
- رد فعل الحائط الرأسي ($ر_1$) يكون عموديًّا على الحائط و يعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ب ء}$.
- رد فعل الأرض الأفقية الخشنة ($ر_2$) غير محدد الاتجاه ولتحديد اتجاهه نرسم $\overleftarrow{أ ء}$ الذى يمر بالنقطة ء (نقطة تلاقى خطى عمل $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ر_1}$) كما فى الشكل.

مثال

(٧) كرة معدنية منتظمة وزنها ١,٥ ث كجم وطول نصف قطرها ٢٥سم ، ربطت من إحدى نقط سطحها ب بخيط طوله ٢٥سم ومربوط طرفه الآخر أ من نقطة فى حائط رأسى فاتزنت الكرة وهى مستندة على الحائط. أوجد مقدار الشد فى الخيط ومقدار رد فعل الحائط.

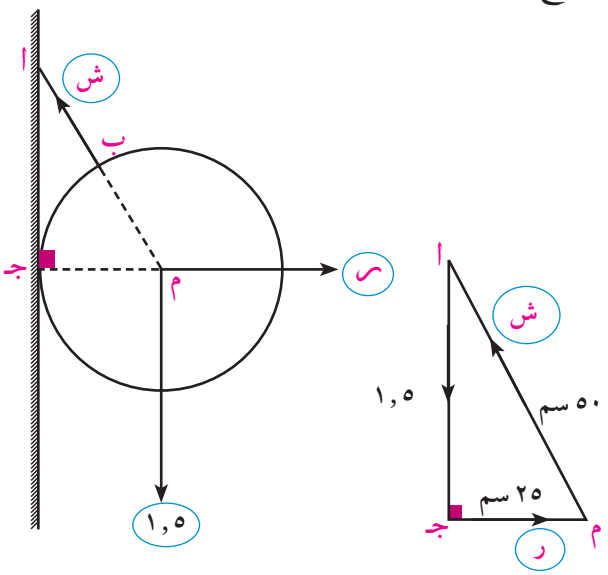
تذكر أن

مركز ثقل الكرة المنتظمة يقع في مركزها الهندسي.

الحل

الكرة متزنة تحت تأثير القوى الثلاث:

- وزن الكرة ١,٥ ث كجم ويؤثر رأسيًّا لأسفل.
- رد فعل الحائط على الكرة ($ر$) ويؤثر عند نقطة تماس الكرة مع الحائط، ويعمل فى إتجاه عمودى على الحائط مارًا بالمركز (م).
- الشد فى الخيط (ش) ويعمل فى اتجاه $\overleftarrow{ب أ}$ ويمر بالمركز (م) نقطة تلاقى قوتي وزن الكرة ورد فعل الحائط.



المثلث م أ جـ هو مثلث القوى، حيث

م أ = ٢٥ + ٢٥ = ٥٠سم

ومن نظرية فيثاغورث: أ جـ = $\sqrt{(٥٠)^٢ - (٢٥)^٢}$

= $٢٥\sqrt{٣}$سم

وبتطبيق قاعدة مثلث القوى:

$$\frac{ش}{٥٠} = \frac{١,٥}{٢٥\sqrt{٣}} = \frac{ر}{٢٥}$$

أىْ أنَّ: ش = $\sqrt{٣}$ث كجم ، $ر = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ث كجم.

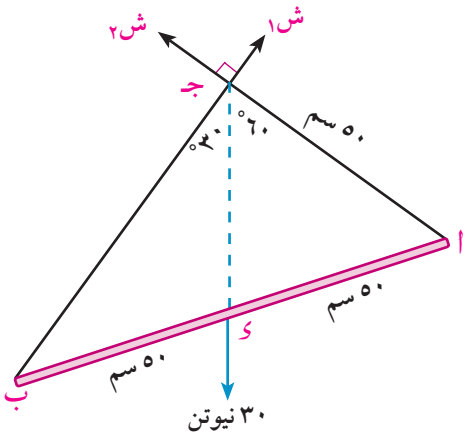
فكر: هل يمكنك حل المسألة السابقة بطرق أخرى؟ اذكر هذه الطرق ثم حل المسألة بإحدى هذه الطرق.

حاول أنْ تحل

٤ كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠٠ ث جم وطول نصف قطرها ٣٠سم معلقة من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٢٠سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس. أوجد فى وضع التوازن كلًّا من الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

مثال

٨ علق قضيب منتظم طوله ١٠٠سم ووزنه ٣٠ نيوتن من طرفيه بحبلين ثبت طرفاهما فى خُطّاف ، فإذا كان الحبلان متعامدين وطول أحدهما ٥٠سم. فأوجد مقدار الشد فى كل من الحبلين عندما يكون القضيب معلقًا تعليقاً حرًّا مطلقًا وفى حالة اتزان.



الحل

القضيب متزن تحت تأثير القوى الثلاث:

وزنه ٣٠ نيوتن ويعمل رأسيًّا لأسفل ويؤثر عند منتصفه ، الشد فى الحبلين ش١ ، ش٢ ويعملان فى الاتجاهين $\overleftarrow{اجـ}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ على الترتيب ويتقاطعان على التعامد عند نقطة جـ.

∵ $\overline{جـء}$ مرسومة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر

∴ جـء = $\frac{١}{٢}$ ا ب = ٥٠سم

∴ ا جـ ء مثلث متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ا جـ ء) = ٦٠° ، ق(∠ب جـ ء) = ٣٠°

بتطبيق قاعدة لامى:

$\frac{ش١}{حا ١٥٠°} = \frac{ش٢}{حا ١٢٠°} = \frac{٣٠}{حا ٩٠°}$ ومنها ش١ = ١٥ نيوتن ، ش٢ = ١٥$\sqrt{٣}$ نيوتن

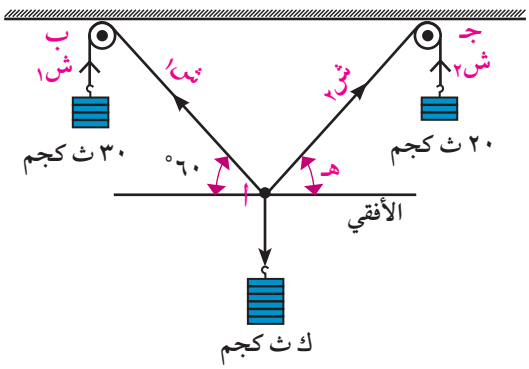
أضف إلى معلوماتك

إذا مر خيط على بكرة ملساء وكان الخيط مشدودًا فإن الشدين على جانبى البكرة متساوى.

فكر: استخدام طرق أخرى لحل المسألة السابقة.

مثال

٩ **فى الشكل المقابل:** ثقل مقداره ك معلق فى طرف خيط وينتهى طرف الخيط بخيطين يمران على بكرتين ملساوين عند ب ، جـ ويحملان ثقلين مقدار كل منهما ٣٠ ، ٢٠ ث جم أوجد مقدار الثقل ك ، قياس زاوية هـ في وضع الإتزان



الحل

في الشكل السابق: نفرض أن ش١ ، ش٢ هما الشدان فى الخيطين و يعملان فى اتجاهى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ جـ}$

البكرتان ملساوان فإن: ش١ = ٣٠ ث كجم ، ش٢ = ٢٠ث كجم

المجموعة متزنة تحت تأثير ثلاث قوى هى:

وزن الجسم ك ث كجم والشد فى الخيطين ش١ ، ش٢

بتطبيق قاعدة لامى:

$$\frac{٣٠}{\text{حا}(٩٠^\circ + هـ)} = \frac{٢٠}{\text{حا}(٦٠^\circ + ٩٠^\circ)} = \frac{ك}{\text{حا}[١٨٠^\circ - (هـ + ٦٠^\circ)]}$$ وبالتبسيط

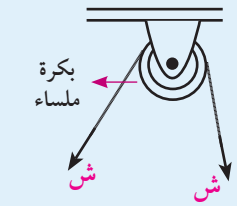
$$\frac{٣٠}{\text{حتا}\, هـ} = ٤٠ = \frac{ك}{\text{حا}(هـ + ٦٠^\circ)}$$

أىْ أنَّ حتا هـ = $\frac{٣}{٤}$ أي أن ق(∠ هـ) = ٣٥ ″ ٢٤ ′ ٤١ °

ك = ٤٠ × حا (٥ ″ ٢٤ ′ ٤١ ° + ٦٠°)

أىْ أنَّ ك ≃ ٣٩,٢٠٩٥ ث كجم

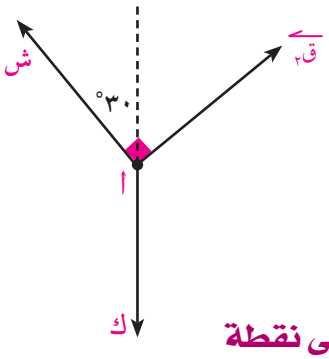
لاحظ أن



الشد متساوٍ في طرفي الخيط.

حاول أنْ تحل

(٥) أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ث جم حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الرأس تحت تأثير قوة على الكرة فى اتجاه عمودى على الخيط. أوجد مقدار القوة ومقدار الشد فى الخيط.



اتزان جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة

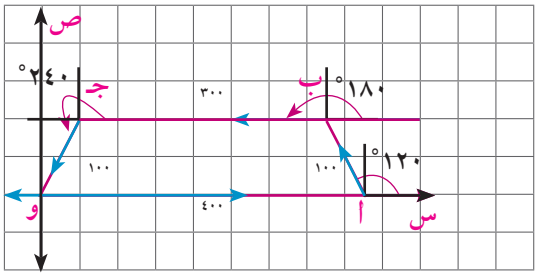
نشاط

مضلع القوى: *Polygon of forces*

باستخدام برنامج (*Geo Gebra*):

مثل القوى التى مقاديرها ٤٠٠ ، ١٠٠ ، ٣٠٠ ، ١٠٠ داين والتى تعمل بزوايا قطبية قياساتها كالآتى: ٠° ، ١٢٠° ، ١٨٠° ، ٢٤٠° على الترتيب. ماذا تلاحظ؟

نلاحظ ان:



- نقطة نهاية خط عمل القوة الأخيرة ينطبق على نقطة بداية خط عمل القوة الأولى فى مضلع القوى الموضح بالشكل.

أىْ أنَّه قد تكون مضلع القوى المقفل و أ ب جـ.

نستنتج من هذا النشاط أنَّ الشرط اللازم والكافى لاتزانِ مجموعةٍ من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة هو أن تُمثِّل هذه القوى بمضلع مقفل.

الطرق التحليلية لاتزان مجموعة من القوى المتلاقية فى نقطة.

فى المثال السابق يمكن إيجاد المركبتين السينية والصادية لمجموعة القوى كالآتى:

س = ٤٠٠ حتا ٠° + ١٠٠ حتا ١٢٠° + ٣٠٠ حتا ١٨٠° + ١٠٠ حتا ٢٤٠°

= ٤٠٠ - ١٠٠ × $\frac{١}{٢}$ - ٣٠٠ - ١٠٠ × $\frac{١}{٢}$ = صفر

ص = ٤٠٠ حا ٠° + ١٠٠ حا ١٢٠° + ٣٠٠ حا ١٨٠° + ١٠٠ حا ٢٤٠°

= ٠ + ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ + ٠ - ٣٠٠ $\sqrt{٣}$ = صفر

نستنتج من ذلك أنه لكى تكون مجموعة القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة متزنه يجب أن تكون:

- المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ = صفر
- المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ = صفر

أىْ أنَّ س = صفر ، ص = صفر

مثال

(١) إذا كانت $\overrightarrow{ق_١}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ - ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = - ٧ $\overrightarrow{س}$ + ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ فأثبت أن مجموعة القوى $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ متوازنة.

الحل

∵ $\overrightarrow{ع}$ = $\overrightarrow{ق_١}$ + $\overrightarrow{ق_٢}$ + $\overrightarrow{ق_٣}$

∴ $\overrightarrow{ع}$ = (٥ - ٧ + ٢) $\overrightarrow{س}$ + (- ٣ + ٢ + ١) $\overrightarrow{ص}$ = $\overrightarrow{٠}$

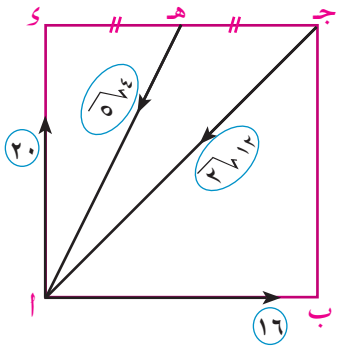
أىْ أنَّ مجموعة القوى متزنة.

حاول أنْ تحل

(٦) إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق_١}$ = ٤ $\overrightarrow{س}$ - ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ = - أ $\overrightarrow{س}$ - ٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣}$ = - ٦ $\overrightarrow{س}$ + ب $\overrightarrow{ص}$ متلاقية فى نقطة ومتزنة فأوجد قيمة كل من أ ، ب.

مثال

(٢) **الشكل المقابل:** يمثل القوى ١٦ ، ٢٠ ، ٢ $\sqrt{١٢}$ ، ٥ $\sqrt{٤}$ نيوتن ،والتى توثر فى المربع أ ب جـ ء فى الاتجاهات $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ على الترتيب حيث هـ منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$. أثبت أنَّ مجموعة القوى متزنة.



الحل

من الشكل المقابل نجد أن القوى ١٦ ، ٢٠ ، ٢ $\sqrt{١٢}$ ، ٥ $\sqrt{٤}$ نيوتن

زواياها القطبية هي: ٠° ، ٩٠° ، ٢٢٥° ، (١٨٠° + θ)

∴ س = ١٦ حتا ٠° + ٢٠ حتا ٩٠°

+ ٢ $\sqrt{١٢}$ حتا ٢٢٥° + ٥ $\sqrt{٤}$ حتا (١٨٠° + θ)

= ١٦ + ٠ - ٢ $\sqrt{١٢}$ × $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ - ٥ $\sqrt{٤}$ × حتا θ

$= ١٦ - ١٢ - ٤\sqrt{٥} \times \frac{١}{٥\sqrt{}} =$ صفر

ص $= ١٦$ حا $٠^\circ + ٢٠$ حا $٩٠^\circ + ١٢\sqrt{٢}$ حا ٢٢٥°

$+ ٤\sqrt{٥}$ حا $(\theta + ١٨٠^\circ)$

$= ٠ + ٢٠ - ١٢\sqrt{٢} \times \frac{١}{٢\sqrt{}} - ٤\sqrt{٥}$ حا θ

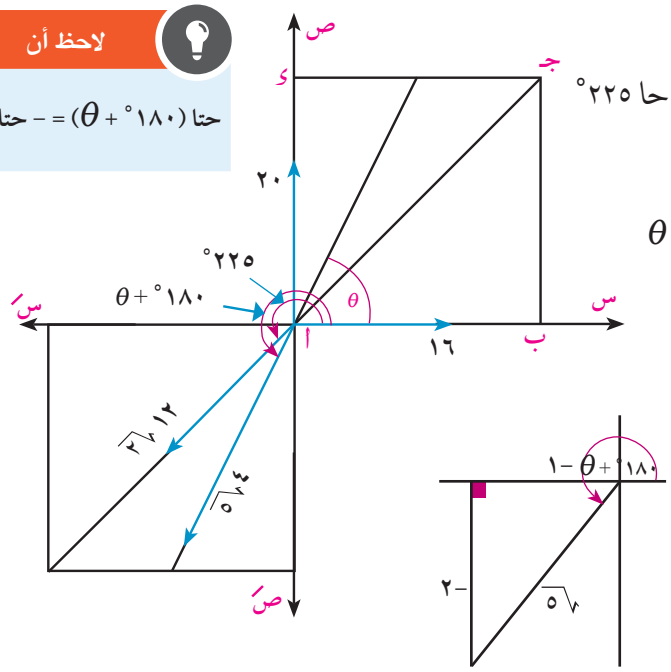
$= ٢٠ - ١٢ - ٤\sqrt{٥} \times \frac{٢}{٥\sqrt{}} =$ صفر

س = صفر ، ص = صفر

∴ المجموعة متزنة.

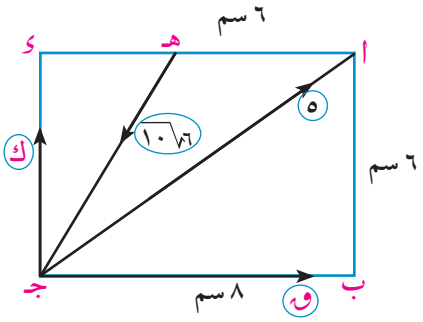
لاحظ أن

حتا $(\theta + ١٨٠^\circ) = -$ حتا θ



حاول أنْ تحل

(٧) **الشكل المقابل:** يمثل القوى التى مقاديرها ق ، ٥ ، ك ، ٦√١٠ نيوتن والمتزنه والتى تؤثر فى المستطيل أ ب جـ ء فى الإتجاهات $\overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، $\overleftarrow{هـ جـ}$ حيث أ ب = ٦سم ، ب جـ = ٨سم ، أ هـ = ٦سم. أوجد قيمة ق ، ك.



تمـاريـن الدرس الرابع

أكمل مايأتى:

(١) الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى المستوية والمتلاقية فى نقطة هو أن تمثل هندسيًّا بـ

(٢) الطريقة التحليلية لاتزان مجموعة من القوى المستوية المتلاقية فى نقطة هى أن تكون ،

(٣) إذا كانت $\overrightarrow{ق_١} = ٤\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٢} = -٧\overrightarrow{س} - ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_٣} = ا\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص}$ متزنة فإن:

ا = ... ، ب = ...

(٤) إذا كانت القوة التى مقدارها ق متزنة مع قوتان متعامدتان مقدارهما ٣ ، ٤ نيوتن فإن مقدار ق = ...

(٥) إذا مُثلت ثلاث قوى مستوية ومتزنة ومأخوذه فى اتجاه دورى واحد بأضلاع مثلث فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع

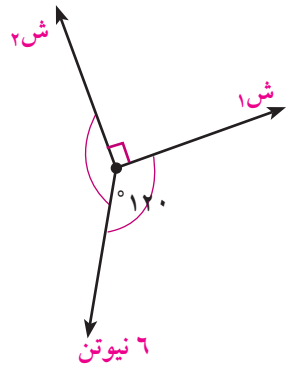
(٦) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع

(٧) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى غير متوازية ومستوية فإن خطوط عمل هذه القوى

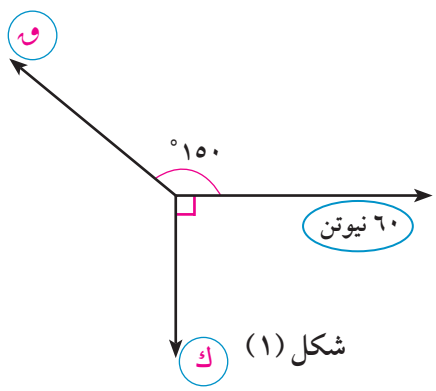
(٨) ثلاث قوى متساوية فى المقدار ومتلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين يساوي

(٩) **فى الشكل المقابل:** مجموعة القوى متزنة ومتلاقية فى نقطة

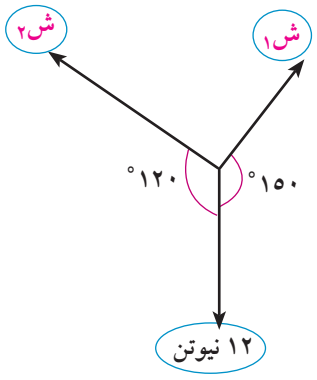
ش١ = ... نيوتن ، ش٢ = ... نيوتن.



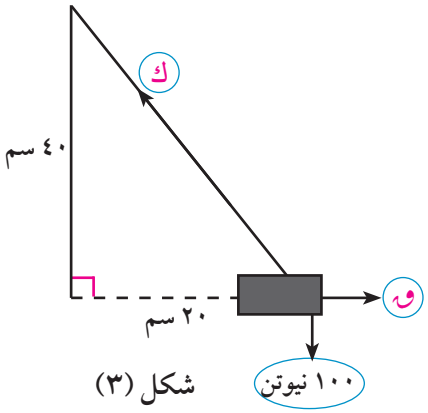
(١٠) يمثل كل شكل من الأشكال الآتية مجموعة من القوى المستوية المتزنة والمتلاقية فى نقطة. أوجد القيمة المجهولة سواء كانت قوة أو قياس زاوية.



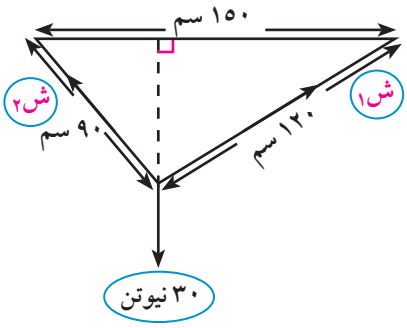
شكل (١)



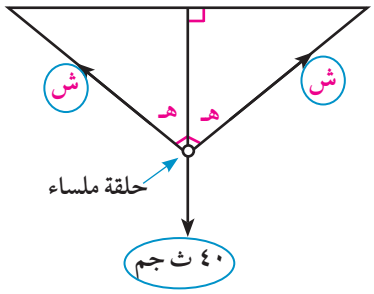
شكل (٢)



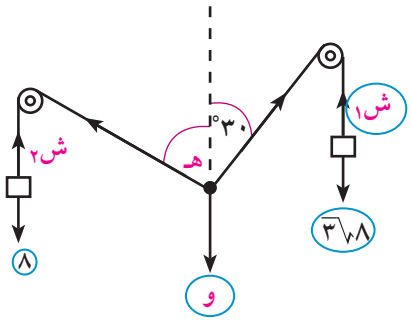
شكل (٣)



شكل (٤)



شكل (٥)



شكل (٦)

(١١) علق ثقل مقدار وزنه ٦٠ ث جم من أحد طرفى خيط طوله ٢٨سم مثبت طرفه الآخر فى نقطة فى سقف حجرة، أثرت على الجسم قوة فاتزن الجسم وهو على بعد ١٤سم رأسيًّا أسفل السقف ، فإذا كانت القوة فى وضع الاتزان عمودية على الخيط فأوجد مقدار كل من القوة والشد فى الخيط.

(١٢) علق ثقل مقداره ٢٠٠ ث جم بخيطين طولاهما ٦٠سم ، ٨٠سم من نقطتين على خط أفقى واحد البعد بينهما ١٠٠سم. أوجد مقدار الشد فى كل من الخيطين.

(١٣) علق جسيم وزنه ٢٠٠ ث جم بواسطة خيطين خفيفين يميل أحدهما على الرأسى بزاوية قياسها هـ ويميل الخيط الآخر على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° ، فإذا كان مقدار الشد فى الخيط الأول يساوى ١٠٠ ث جم. فأوجد هـ ومقدار الشد في الخيط الثاني.

(١٤) وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها هـ حيث حا هـ = ٠,٦ وحفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم.

(١٥) وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° وحفظ الجسم فى حالة توازن بتأثير قوة مقدارها ٣٦ نيوتن تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى. احسب مقدار وزن الجسم ومقدار رد فعل المستوى.

(١٦) كرة معدنية منتظمة ملساء وزنها ٣ نيوتن مستقرة بين حائط رأسى أملس ومستوى أملس يميل على الحائط الرأسى بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد الضغط على كل من الحائط الرأسى والمستوى المائل

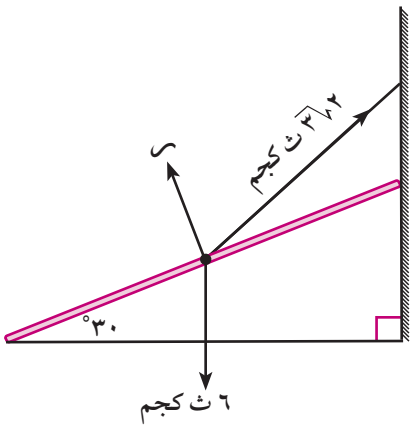
(١٧) علق قضيب منتظم طوله ٥٠سم ووزنه ٢٠ نيوتن من طرفيه بواسطة خيطين ثبت طرفاهما فى نقطة واحدة. فإذا كان طولا الخيطين ٣٠سم ، ٤٠سم على الترتيب فأوجد الشد فى كل من الخيطين.

(١٨) خمس قوى مقاديرها ق ، ٦ ، ٢√٤ ، ٢√٥ ، ك ث كجم متزنة وتؤثر فى نقطة مادية فى اتجاهات الشرق والشمال والشمال الغربى والجنوب الغربى والجنوب على الترتيب. أوجد مقدار كل من ق ، ك.

(١٩) أثرت القوى المستوية ٥ ، ٤ ، ق ، ٣ ، ك ، ٧ ث كجم فى نقطة مادية والزاوية بين كل قوتين متتاليتين منها ٦٠°. أوجد مقدار كل من ق ، ك حتى تكون المجموعة فى حالة اتزان.

تفكير إبداعى:

(٢٠) **فى الشكل المقابل** جسم وزنه ٦ ث كجم موضوع على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠ وحفظ توازنه بواسطة قوة شد ش مقدارها ٣√٢ ث كجم تعمل فى خيط مثبت أحد طرفيه بالجسم والآخر فى حائط رأسى. أوجد قياس الزاوية التى يصنعها الخيط مع المستوى ومقدار رد فعل المستوى على الجسم.



ملخّص الوحدة

الاستاتيكا: هى علم دراسة سكون الأجسام تحت تأثير مجموعة من القوى.

القوة: هى المقياس الكمي للتأثير الميكانيكى على الأجسام المادية.

خواص القوة: يتحدد تأثير القوة على الجسم بالعوامل الآتية:

١- المقدار. ٢- الاتجاه. ٣- نقطة التأثير.

- إذا كانت $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ قوتان يحصران بينهما زاوية قياسها ى وكانت محصلتها $\overrightarrow{ع}$ وتميل على $\overrightarrow{ق_١}$ بزاوية قياسها هـ فإن: $ع = \sqrt{ق_١^٢ + ق_٢^٢ + ٢ ق_١ ق_٢ جتا ى}$ ، ظا هـ $= \frac{ق_٢ حا ى}{ق_١ + ق_٢ حتا ى}$

أو باستخدام قاعدة الجيب: $\frac{ق_١}{حا هـ_١} = \frac{ق_٢}{حا هـ_٢} = \frac{ع}{حا ى}$

- **القيمة العظمى المحصلة للقوتان** ق١ ، ق٢ = ق١ + ق٢ وتعمل نفس اتجاههما.
- **القيمة الصغرى المحصلة للقوتان** ق١ ، ق٢ = |ق١ - ق٢| وتعمل في اتجاه القوة الكبرى.
- إذا كانت $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ مركبتى القوة $\overrightarrow{ع}$ ، يصنعان مع $\overrightarrow{ع}$ زاويتين هـ١ ، هـ٢ على الترتيب فإن:

$$\frac{ق_١}{حا هـ_٢} = \frac{ق_٢}{حا هـ_١} = \frac{ع}{حا (هـ_١ + هـ_٢)}$$

- إذا كانت $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ مركبتى القوة $\overrightarrow{ع}$ المتعامدتين والتى تميل فيها خط عمل $\overrightarrow{ع}$ مع خط عمل $\overrightarrow{ق_١}$ بزاوية قياسها هـ فإن ق١ = ع حتا هـ ، ق٢ = ع حا هـ
- **مضلع القوى:** إذا مُثلت مجموعة من القوى المستوية المتلاقيه في نقطة تمثيلًا بأطوال أضلاع مضلع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد فإن محصلة هذه القوى تساوي طول الضلع الذى يقفل هذا المضلع فى الاتجاه الدورى المضاد.
- إذا أثرت عدة قوى مستوية ومتلاقية فى نقطة (فى نظام إحداثى متعامد) وكان المجموع الجبرى لمركبات هذه القوى فى اتجاهين متعامدين هما س ، ص فإن: $ع = \sqrt{س^٢ + ص^٢}$ ، ظا هـ $= \frac{ص}{س}$
- إذا مُثلت مجموعة من القوى المستوية تمثيلًا تامًا بأطوال مضلع قوى مقفل كانت هذه المجموعة متزنة.
- تكون مجموعة القوى المستوية المتلاقية فى نقطة متزنة إذا كانت
 ١) المجموع الجبرى لمركبات القوي فى اتجاه $\overrightarrow{وس}$ = صفر
 ٢) والمجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه $\overrightarrow{وص}$ = صفر.
- اتزان جسم تحت تأثير قوتين هو أن تكون القوتان: متساويتان فى المقدار ، متضادتين فى الاتجاه ، خط عملها على استقامة واحدة.
- **قاعدة مثلث القوى:** إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة ورسم مثلث أضلاعه توازى خطوط عمل هذه القوى وفى اتجاه دورى واحد فإن أطوال أضلاع المثلث تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.
- **قاعدة لامى:** إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الأخريين.

تمارين عامة (الوحدة الأولى)

اكمل ما يأتى:

(١) قوتان مقدارهما ٤ ، ق داين وقياس الزاوية بينهما ∈]٠ ، π[، محصلتها تنصف الزاوية بينهما فإن ق = ... ث جم.

(٢) قوتان تؤثران فى نقطة مادية مقدارهما ٥ ، ٨ نيوتن فإن أكبر قيمة للمحصلة = ... نيوتن ، أصغر قيمة للمحصلة = ... نيوتن.

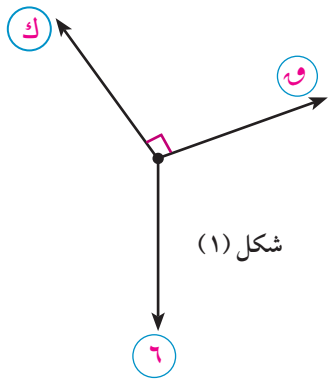
(٣) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية هـ فإن مركبة وزنه فى اتجاه المستوى تساوى

(٤) إذا اتزنت القوة $\overrightarrow{ق}$ مع قوتين متعامدتين مقدارهما ٦ ، ٨ ث كجم فإن مقدار القوة ق يساوى ث كجم.

(٥) إذا كانت القوى $\overrightarrow{ق_1} = أ\overrightarrow{س} - ٦\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = -٣\overrightarrow{س} + ٤\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ٩\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ متزنة فإن

أ = ... ، ب = ...

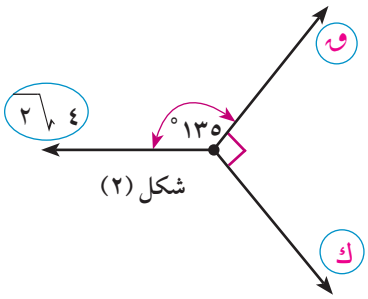
(٦) كل شكل مما يأتى مكون من ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة. أكمل ما يأتى:



شكل (١)

ق = ...

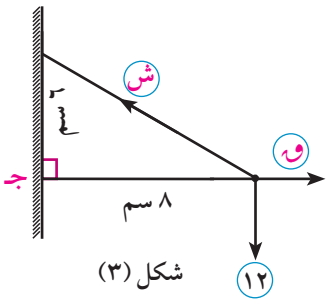
ك = ...



شكل (٢)

ق = ...

ك = ...

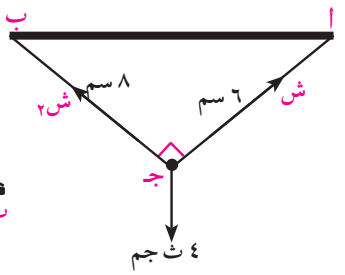


شكل (٣)

ق = ...

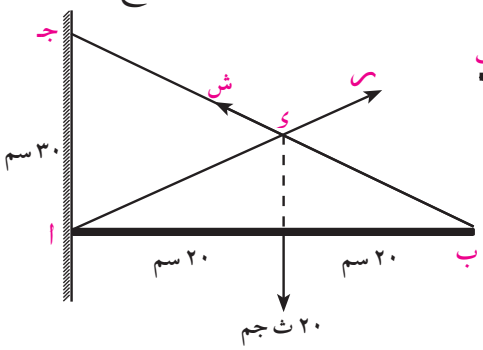
ك = ...

(٧) $\overline{أب}$ قضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مستوية كما هو موضح فى كل شكل. **أكمل:**



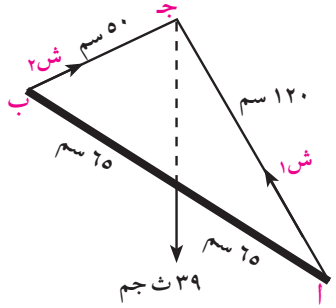
أ ش١ = ... ث جم.

د ش٢ = ... ث جم.



ب ش = ... ث جم.

هـ ر = ... ث جم.



جـ ش١ = ... ث جم.

و ش١ = ... ث جم.

(٨) إذا كانت $\overrightarrow{ع}$ هى محصلة القوتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ اللذين يحصران بينهما زاوية قياسها ى وكان قياس زاوية ميل المحصلة على $\overrightarrow{ق_١}$ يساوى هـ فأوجد:

أ مقدار $\overrightarrow{ع}$ ، عندما ق$_١$ = ٨ نيوتن ، ق$_٢$ = ١٥ نيوتن ، ى = ٩٠°.

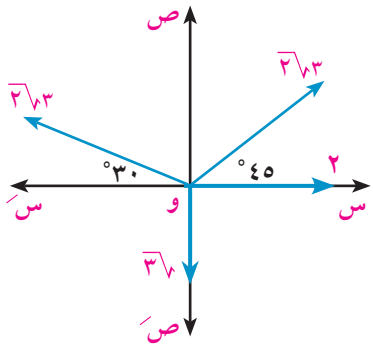
ب مقدار $\overrightarrow{ع}$ وقياس زاوية هـ عندما ق$_١$ = ق$_٢$ = ٦٠ داين ، ى = ٦٠°

ج مقدار $\overrightarrow{ع}$ وقياس زاوية هـ عندما ق$_١$ = ٦ نيوتن ، ق$_٢$ = ٣ نيوتن والمحصلة عمودية على ق$_٢$.

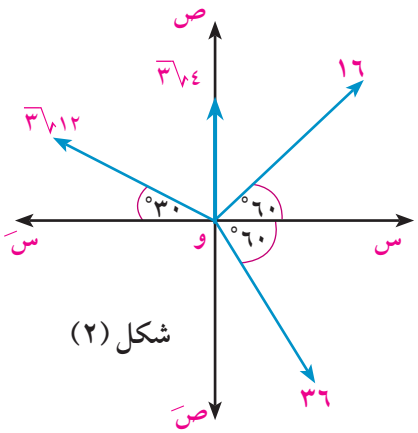
د مقدار $\overrightarrow{ع}$ وقياس زاوية ى إذا كان ق$_١$ = ٣√٣ نيوتن ، ق$_٢$ = ٦ نيوتن والمحصلة عمودية على ق$_١$.

هـ قيمة ق$_١$ عندما ع = ١٢ نيوتن ، ق$_٢$ = ١٢√٣ نيوتن ، ى = ١٥٠°

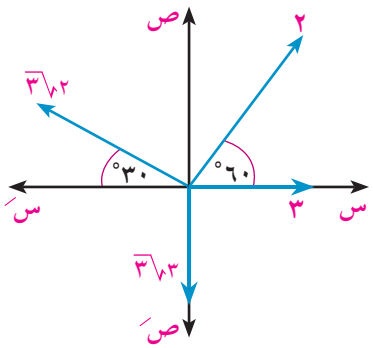
(٩) أوجد مقدار المحصلة وزاوية ميلها مع محور السينات فى كل شكل من الأشكال الآتية:



شكل (١)

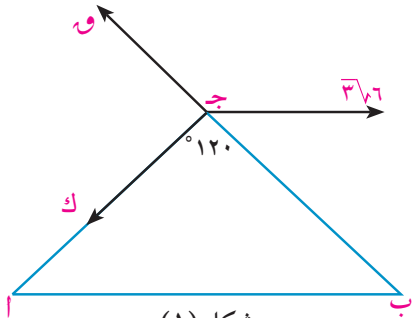


شكل (٢)

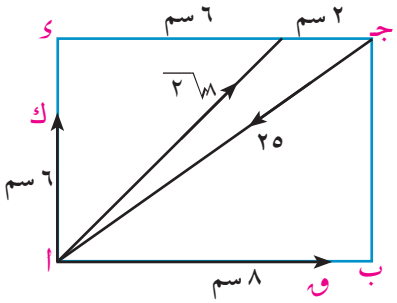


شكل (٣)

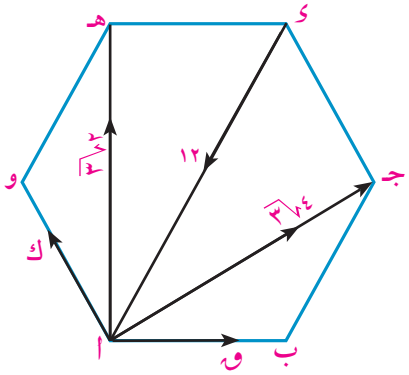
(١٠) أوجد مقدار كل من ق ، ك بحيث تصبح كل مجموعة مما يأتى متزنة.



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

اختبار تراكمى

(١) قوتان مقدارهما ٣\٨ ، ٨ نيوتن توثران فى نقطة مادية وتحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠°. أوجد مقدار محصلتهما وقياس الزاوية التى تصنعها مع القوة الأولى.

(٢) قوتان مقدارهما ٣٠ ، ١٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، إذا كان مقدار محصلتهما ٢٦ نيوتن. أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(٣) قوتان مقدارهما ٢ ، ق نيوتن وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° أوجد ق عندما:

(أ) مقدار المحصلة يساوى ق.

(ب) اتجاه المحصلة عمودى على القوة الثانية.

(جـ) المحصلة تنصف الزاوية بين القوتين.

(٤) حَلِّل قوة مقدارها ٩٠ فى خيط قوة إلى قوتين متساويتين فى المقدار وقياس الزاوية بين اتجاهيهما ٦٠°.

(٥) أوجد مقدار المركبتين المتعامدتين، لوزن جسم موضوع على مستوى أفقي ومقداره ٨٠ نيوتن إذا عُلِمَ أنَّ إحداهما تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° إلى أسفل.

(٦) ثلاث قوى مقاديرها ٢ق ، ٤ق ، ٦ق تؤثر فى نقطة مادية فى اتجاهات موازية لأضلاع مثلث متساوى الأضلاع مأخوذة فى ترتيب دورى واحد أوجد مقدار واتجاه المحصلة.

(٧) أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٨سم ، ب جـ = ٦سم ، و ∈ $\overline{جـ ء}$ بحيث و ء = ٦سم. أثرت قوى مقاديرها ٦ ، ٢٠، ٣\١٣ ، ٢ نيوتن فى $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{جـ أ}$ ، $\overleftarrow{أ و}$ ، $\overleftarrow{أ ء}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٨) علق ثقل مقداره ٨٠ ث جم فى طرف خيط مثبت طرفه الآخر فى حائط رأسى أزيح الثقل بقوة عمودية على الخيط حتى أصبح الخيط مائلًا على الحائط بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد فى وضع الاتزان مقدار القوة، وكذلك الشد فى الخيط.

(٩) وضع ثقل قدره ٢٠ ث كجم على مستو مائل أملس يميل على الأفقى بزاوية ى، حيث حتا ى = $\frac{٤}{٥}$ ومنع من الانزلاق بتأثير قوة أفقية مقدارها (ق) أوجد ق وكذلك رد فعل المستوى.

(١٠) قضيب منتظم يرتكز بطرفيه على مستويين أملسين مائلين يصنعان مع الأفقى زاويتين قياساهما ٦٠° ، ٣٠°. أوجد قياس الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى فى وضع الاتزان ، وإذا كان مقدار وزن القضيب يساوى ٢٤ نيوتن عين مقدار رد الفعل لكل من المستويين.



الوحدة الثانية

الديناميكا
Dynamics

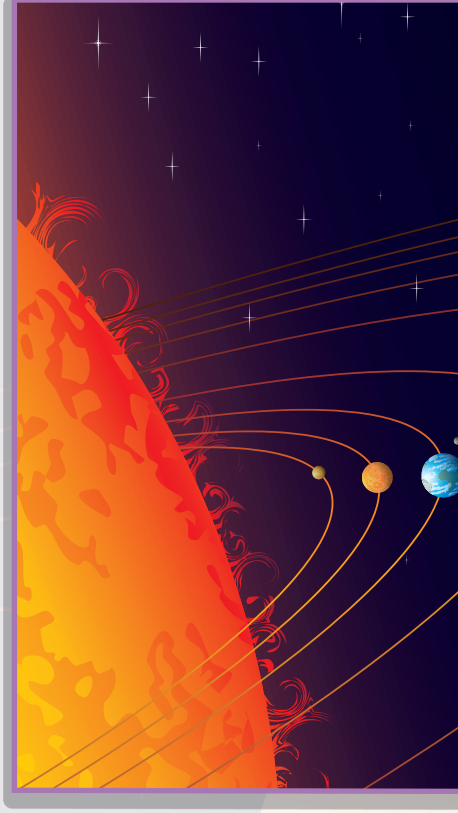
مقدمة الوحدة

يختص علم الديناميكا بدراسة حركة الأجسام, حيث ينقسم إلى الكينماتيكا والكيناتيكا وسوف نقتصر فى هذه الوحدة على دراسة الكينماتيكا kinematics ذلك العلم الذى يبحث فى حركة الأجسام من الوجهة الهندسية فقط دون الأخذ فى الاعتبار للقوى المؤثرة عليها، وجدير بالذكر أن الكينماتيكا لها أهميتها التطبيقية فى حياتنا العملية مثل انتقال الحركة فى الآلات ومتطلباتها، ومن هنا سنتناول فى هذه الوحدة دراسة حركة الأجسام والظواهر المصاحبة لهذه الحركة ومسبباتها.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يَتعرَّف مفهوم الجسيم على أنه نقطة افتراضية.
- يتفهم المقصود بالحركة الانتقالية لجسيم من موضع لآخر.
- يدرك أن الحركة الانتقالية تحدث إذا كانت جميع نقاط الجسم المتحرك فى خطوط موازية لبعضها فى أثناء الحركة.
- يميز بين الإزاحة والمسافة.
- يتعرف مفهوم السرعة المنتظمة (متجه السرعة – الحركة المنتظمة – متجه السرعة المتوسطة – متجه السرعة اللحظية – السرعة النسبية – وحدات قياس السرعة).
- يتعرف مفهوم السرعة النسبية.
- يعبر عن كل من متجهى الموضع والسرعة بدلالة متجهى الوحدة $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$.
- يتعرف الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة – وحدات قياس العجلة).
- يتعرف الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية.
- يستنتج قوانين الحركة بعجلة منتظمة (إذا تحرك جسيم بعجلة منتظمة وتغيرت سرعته من ع. إلى ع خلال فترة زمنية ن فإن: ع = ع. + جـ ن ، ف = ع ن + $\frac{1}{2}$ جـ ن^{2} ، ع^{2} = ع^{2} + ٢ جـ ف
- يتعرف تطبيقات على قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة.
- يتعرف قوانين الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية فى حالة صعود الجسم أو هبوطه.
- يتعرف الجاذبية الأرضية (قانون نيوتن للجذب العام). ثابت الجذب العام .
- يتعرف التمثيل البياني لمنحنى الإزاحة مع الزمن ، منحنى السرعة مع الزمن.
- يستخدم الآلة الحاسبة البيانية فى تمثيل العلاقة بين الإزاحة مع الزمن والسرعة مع الزمن فى صورة أنشطة.



المصطلحات الأساسية

حركة مستقيمة	Rectilinear Motion	إزاحة	Displacement
مسافة	Distance	سرعة منتظمة	Uniform Velocity
متجه سرعة	Vector Velocity	سرعة لحظية	Instantaneous Velocity
السرعة المتوسطة	Average Velocity	متجه موضع	Position Vector
السرعة النسبية	Relative Velocity	عجلة منتظمة	Uniform Acceleration
حركة رأسية	Vertical Motion	جاذبية أرضية	Gravity
جذب عام	Universal Gravitation		

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة علمية	Scientific calculator	برامج رسومية للحاسوب	Graphical programs
آلة حاسبة رسومية	Graphical calculator		

دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١): الحركة المستقيمة.

الدرس (٢ - ٢): الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة.

الدرس (٢ - ٣): الحركة الرأسية تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

الدرس (٢ - ٤): قانون الجذب العام.

مخطط تنظيمي للوحدة



الحركة المستقيمة

Rectilinear motion

الدرس ١

سوف تتعلم

- وحدات النظام المترى.
- العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة.
- السرعة المتوسطة.
- السرعة اللحظية.
- السرعة النسبية.

المصطلحات الأساسيّة

- حركة مستقيمة Rectilinear Motion
- نظام مترى IS
- متجه إزاحة Displacement Vector
- متجه موضع Position Vector
- متجه سرعة Vector Velocity
- حركة منتظمة. Uniform mation
- سرعة متوسطة Average Velocity
- سرعة لحظية Instantaneous Velocity
- السرعة النسبية Relative Velocity

الأدوات والوسائل

- ورق مربعات.
- آلة حاسبة علمية .
- برامج رسومية للحاسوب.

تقديم:

بدأت أنظمة القياس فى حياة الشعوب مستمدة من البشر أنفسهم مثل (الذراع - الباع - الشبر - البوصة - القدم...) ومع تقدم العلوم وازدياد حركة التجارة، فقد أصبح من الضرورى إيجاد معايير دقيقة وثابتة إلى أن تم اعتماد النظام العشرى الذى ابتكره الفرنسيون عام ١٧٩٠م، واستمر حتى جاء النظام العالمى الموحدIS وهو مشتق من الكلمة International System Of Units ويتشكل هذا النظام من الوحدات الأساسية (المتر ، الكيلو جرام ، والثانية، الأمبير ، والكلفن ، المول ، القنديلة)، وكذلك من الوحدات المشتقة التى تتشكل كحاصل ضرب قوى الوحدات الأساسية وفقًا لبعض العلاقات الجبرية.

وحدات النظام المترى SI

تبين الجداول التالية الوحدات الأساسية فى النظام المترى، وكذلك تحويلات بعض المقادير فى هذا النظام.

القياس	اسم الوحدة	الرمز
الطولlength	مترmetre	م(m)
الكتلة mass	كيلو جرام kilogram	كجم(kg)
الزمنtime	ثانية second	ث(s)

القياس	كيلو -	هيكتو -	ديكا -	ديسى -	سنتى -	ملى -	ميكرو -
الوحدة	$١٠^{٣}$	$١٠^{٢}$	١٠	$١٠^{-١}$	$١٠^{-٢}$	$١٠^{-٣}$	$١٠^{-٦}$
الرمز	ك	هك	دك	دسي	س	مل	مك
	k	h	da	d	c	m	u

١- مقياس الطول Length

المتر (م) هو وحدة قياس الطول فى النظام (SI) والمتر المعيارى هو المسافة التى يقطعها الشعاع الضوئى فى الفراغ خلال $\frac{١}{٢٩٩٧٩٢٤٥٨}$ ثانية.

٢- مقياس الكتلة Mass

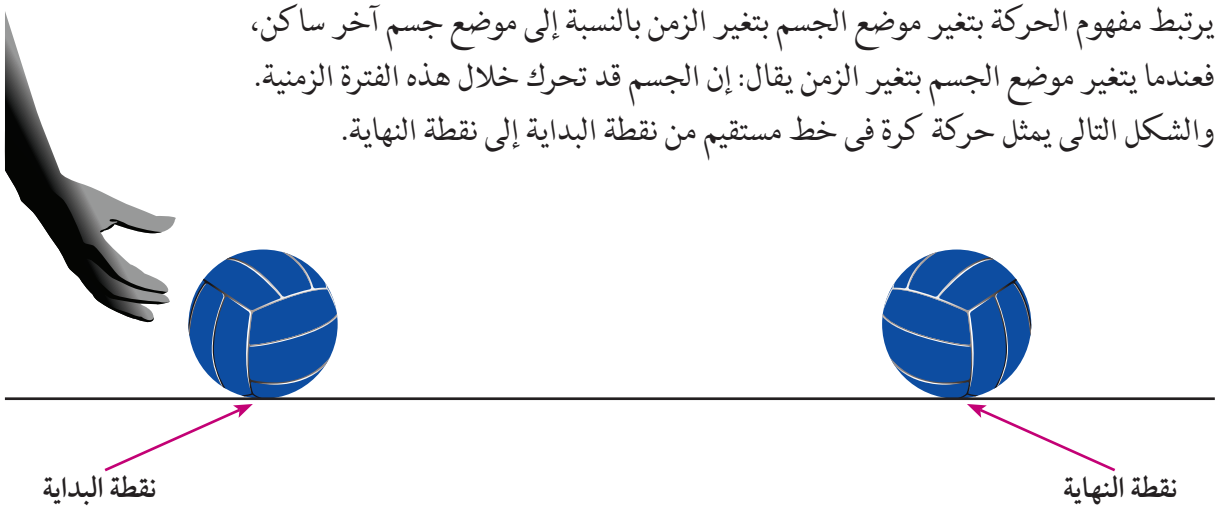
الكيلو جرام (كجم) وحدة قياس الكتل فى النظام الدولى (SI) وهو كتلة أسطوانة من سبيكة البلاتين والإيريديوم قطرها ٣٩ مليمتر وارتفاعها ٣٩ مليمتر فى درجة الصفر المئوى.

٣- مقياس الزمن time

الثانية المعيارية هى المدة الزمنية اللازمة لقطع الشعاع الضوئى مسافة قدرها ٢٩٩٧٩٢٤٥٨ مترًا فى الفراغ.
وتسمى الأجزاء الصغيرة من الثانية بالمللى ثانية (مللي.ث) كما توجد وحدات أكبر للزمن مثل الدقيقة والساعة واليوم وغيرها.

الحركة وأنواعها Motion and its Types

يرتبط مفهوم الحركة بتغير موضع الجسم بتغير الزمن بالنسبة إلى موضع جسم آخر ساكن، فعندما يتغير موضع الجسم بتغير الزمن يقال: إن الجسم قد تحرك خلال هذه الفترة الزمنية.
والشكل التالى يمثل حركة كرة فى خط مستقيم من نقطة البداية إلى نقطة النهاية.

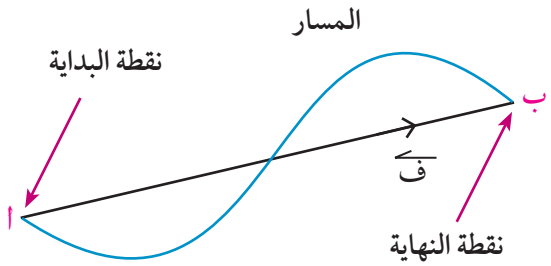


المسافة Distance

إذا تحرك قطار من مدينة القاهرة إلى مدينة المنصورة فإن المسافة بين القاهرة والمنصورة تعتمد على طول المسار الذى تحركه القطار، وتعتبر المسافة كمية قياسية إذ يجب معرفة مقدارها فقط، فإذا كان مقدار المسافة بين المدينتين ١٦٠ كم فإن الرقم ١٦٠ يمثل القيمة العددية ، (كم) هى وحدة قياس المسافة.

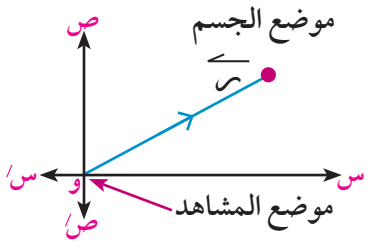
متجه الإزاحة Displacement vector

هو المتجه الذى تمثله القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ التى نقطة بدايتها (أ) ونقطة نهايتها (ب) ويرمز لمتجه الإزاحة $\overrightarrow{أب}$ بالرمز $\overrightarrow{ف}$ ، ويرمز لمعيار متجه الإزاحة بالرمز $||\ \overrightarrow{أب}\ ||$ وهو لا يساوى بالضرورة طول المسار الذى قطعه الجسيم فى أثناء الحركة.



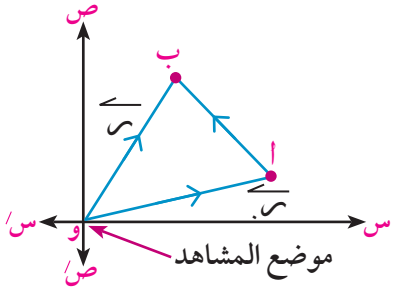
متجه الموضع Position vector

هو المتجه الذى تنطبق نقطة بدايته مع موضع المشاهد (و) ونقطة نهايته مع موضع الجسيم ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{ر}$ حيث $\overrightarrow{ر} = س\overrightarrow{س} + ص\overrightarrow{ص}$
$\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ متجها وحدة متعامدين



العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة:

Relation between position vector and displacement vector



إذا كانت (و) هى موضع المشاهد، أ(س١، ص١) ، ب (س٢، ص٢) هما موضعا الجسيم عند لحظتين متتاليتين فإن $\overrightarrow{أب}$ هو متجه الإزاحة للجسيم وليكن $\overrightarrow{ف}$.

فإذا رمزنا لمتجه الموضع عند اللحظة ن بالرمز $\overrightarrow{ر}$ ، متجه الموضع عند اللحظة (ن + هـ) بالرمز $\overrightarrow{ر_{ن}}$ فإن: $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ر_{ن}}$

$\overrightarrow{ف} = (س_٢ \overrightarrow{س} + ص_٢ \overrightarrow{ص}) - (س_١ \overrightarrow{س} + ص_١ \overrightarrow{ص})$

$= (س_٢ - س_١) \overrightarrow{س} + (ص_٢ - ص_١) \overrightarrow{ص}$

$|| \overrightarrow{ف} || = \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$ ،

$\therefore \overrightarrow{ف} = || \overrightarrow{ف} || \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{ف}$ (اتجاه الحركة)

مثال

(١) يتحرك جسيم بحيث كان متجه موضعه $\overrightarrow{ر}$ يعطى كدالة فى الزمن بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ بالعلاقة: $\overrightarrow{ر} = (٣ن + ٢) \overrightarrow{س} + (٤ ن^٢ - ١) \overrightarrow{ص}$ أوجد المسافة المقطوعة حتى اللحظة ن = ٤

الحل

$\overrightarrow{ر}(٠) = ٢ \overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ر}(٤) = (٣ \times ٤ + ٢) \overrightarrow{س} + (٤ \times ٤ - ١) \overrightarrow{ص} = ١٤ \overrightarrow{س} + ١٥ \overrightarrow{ص}$

$\therefore \overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ر}(٤) - \overrightarrow{ر}(٠)$

$= (١٤ - ٢) \overrightarrow{س} + (١٥ + ١) \overrightarrow{ص} = ١٢ \overrightarrow{س} + ١٦ \overrightarrow{ص}$

$|| \overrightarrow{ف} || = \sqrt{١٤٤ + ٢٥٦}$ ، ف = ٢٠ وحدة مسافة

حاول أنْ تحل

(١) فى المثال السابق : أوجد المسافة المقطوعة من ن = ١ إلى ن = ٣.

مقدار السرعة *Speed*

إذا تسابق شخصان فى فترة زمنية محددة فإن الشخص الذي يقطع مسافة أطول يكون أسرع من الشخص الذى يقطع مسافة أقل.

و يمكن قياس مقدار السرعة بالمسافة المقطوعة خلال فترة زمنية محددة ووحدات قياس السرعة هى:

كيلو متر / ساعة وتكتب (كم / س) أو متر / ثانية وتكتب (م / ث) حيث : $\frac{١ \text{ كم}}{١ \text{ س}} = \frac{١٠٠٠ \text{ م}}{٦٠ \times ٦٠ \text{ ث}} = \frac{٥}{١٨}$ م / ث

أىْ أنَّ ١ كم / س = $\frac{٥}{١٨}$ م / ث، ١ م / ث = $\frac{١٨}{٥}$ كم / س

حاول أنْ تحل

(٢) (أ) حول ٩٠ كم / س إلى م / ث (ب) حول ١٥م / ث إلى كم / س

(٣) أكمل الجدول الآتي:

١٨ كم / س	٥٤ كم / س	 كم / س	٩٠ كم / س	... كم / س	١٨٠ كم / س	$\times \frac{٥}{١٨}$
٥ م / ث	...م / ث	٢٠م / ث	...م / ث	٣٠م / ث	...م / ث	$\times \frac{١٨}{٥}$

متجه السرعة *Velocity vector*

متجه سرعة جسيم هو المتجه الذى معياره يساوى قيمة السرعة وينطبق اتجاهه على اتجاه الحركة.

الحركة المنتظمة *Uniform motion*

هى الحالة التى يكون فيها كل من معيار واتجاه متجه السرعة ثابتًا، أىْ أنَّ: الجسيم يتحرك فى اتجاه ثابت، حيث يقطع مسافات متساوية خلال فترات زمنية متساوية.

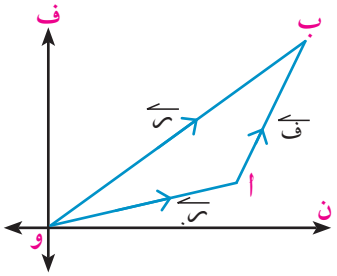
وتكون العلاقة بين القياسيين الجبريين للمتجهين $\overrightarrow{ف}$ ، $\overrightarrow{ع}$ فى الحركة المنتظمة هى: **ف = ع ن**

مقدار السرعة المتوسطة *Magnitude of the average velocity*

إذا قامت سيارة برحلة من مدينة القاهرة إلى مدينة الغردقة فإن المسافة بين المدينتين طبقًا لمسار السيارة يبلغ ٥١٠ كم، فإذا كانت السيارة تتحرك بسرعات متفاوتة بين المدينتين وكان الزمن الكلى لتلك الرحلة ٦ ساعات فإن سرعة السيارة فى هذة الحالة تسمى بالسرعة المتوسطة وتكون:

السرعة المتوسطة $ع_م = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٥١٠}{٦} = ٨٥$ كم / س

متجه السرعة المتوسطة *Vector of the average velocity*



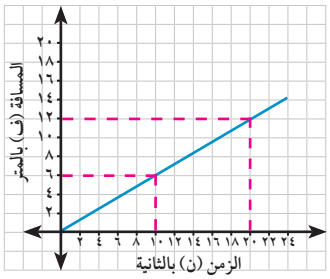
إذا تحرك جسيم عند لحظتين زمنيتين $ن_١$ ، $ن_٢$ عند الموضعين أ ، ب على الترتيب وكان $\overrightarrow{ف}$ هو متجه الإزاحة فى الفترة الزمنية $(ن_٢ - ن_١)$ فإن $\overrightarrow{ع_م}$ يعرف بمتجه السرعة المتوسطة لهذا الجسيم خلال تلك الفترة الزمنية ويكون:

$$\frac{\overrightarrow{ف}}{ن_٢ - ن_١} = \frac{\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ر_.}}{ن_٢ - ن_١} = \overrightarrow{ع_م}$$

مثال

(٢) يبين الشكل المقابل العلاقة بين الزمن والمسافة لحركة راكب دراجة ، فى خط مستقيم من نقطة و أوجد:

(أ) متجه السرعة المتوسطة. (ب) مقدار السرعة المتوسطة.



الحل

(أ) نوجد متجه السرعة المتوسطة باستخدام نقطتين على الخط البياني.

$\overrightarrow{ع_م} = \frac{\overrightarrow{ر_2} - \overrightarrow{ر_1}}{ن_2 - ن_1}$ بالتعويض عن: $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{ر_2} = 12 \text{ ، } ن_2 = 20 \\ \overrightarrow{ر_1} = 6 \text{ ، } ن_1 = 10 \end{array}\right\}$

$\overrightarrow{ع_م} = \frac{6 - 12}{10 - 20} \overrightarrow{ى} = \frac{6}{10} \overrightarrow{ى} = 0,6 \overrightarrow{ى}$ حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى إتجاه الحركة

ب مقدار السرعة المتوسطة تساوى القيمة المطلقة لمتجه السرعة المتوسطة أىْ أنَّ ع م = ٠,٦ م / ث.

تفكير ناقد:

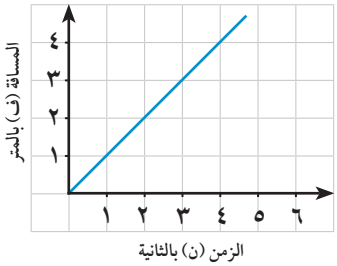
١- ماذا تعنى الإشارة الموجبة لمتجه السرعة المتوسطة ؟

٢- هل يوجد اتجاه للسرعة المتوسطة ؟ فسِّر إجابتك.

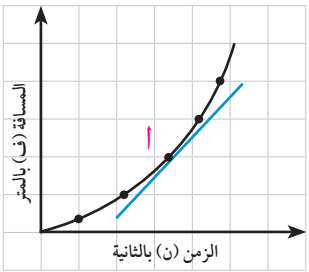
٩ حاول أنْ تحل

٤ يبين الشكل التالى رسمًا بيانيًّا لمنحنى (المسافة - الزمن) لفأر يهرب من قط.

أعد رسم هذا الشكل إذا هرب الفأر من القط بضعف سرعته.



السرعة اللحظية *Instantaneous Velocity*



إذا تأملنا حركة جسيم بسرعة ليست ثابتة (متغيرة) من خلال منحنى المسافة - الزمن وتم تسجيل عدة مواقع لهذا الجسيم على فترات متساوية من الزمن فإنه يمكن تعيين السرعة اللحظية عند نقطة ما ولتكن (أ) وذلك عن طريق رسم مماس للمنحنى عند تلك النقطة فى تلك اللحظة ويكون ميل المماس هو السرعة اللحظية.

ميل المماس (السرعة اللحظية) = $\frac{\text{التغير فى المسافة}}{\text{التغير فى الزمن}}$ (عندما تقترب Δن من الصفر)

تفكير ناقد: رغم أن السرعة اللحظية والسرعة المتوسطة عبارة عن تغير المسافة بالنسبة للزمن ، إلا أنه يوجد اختلاف بينهما - وضح هذا الاختلاف.

مثال

٣ إذا كان عداد المسافات فى إحدى السيارات يشير إلى الصفر، وبعد ربع ساعة أصبح يشير إلى ١٨ كم. فاحسب السرعة المتوسطة. علماً بأن السيارة تحركت في اتجاه ثابت.

تذكر أن

عداد السرعة للسيارة يعطى قيمة السرعة اللحظية بالكم / س

الحل

السرعة المتوسطة = $\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$

أىْ أنَّ: ع م = $\frac{ف}{ن}$ لذلك فإن ع م = $\frac{18}{0,25}$ = ٧٢ كم / س

حاول أنْ تحل

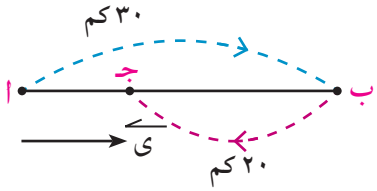
(٥) يستطيع الفهد أن يعدو بسرعة ثابتة قيمتها ٢٥م / ث. احسب المسافة التى يمكن للفهد أن يقطعها خلال نصف دقيقة.

مثال

حساب قيمة السرعة المتوسطة

(٤) قطع راكب دراجة ٣٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٨ كم / س، ثم عاد على نفس الطريق فقطع ٢٠ كم فى الاتجاه المضاد بسرعة ١٥ كم / س أوجد قيمة سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

الحل



إذا بدأ راكب الدراجة الحركة من الموضع أ إلى الموضع ب فى المرحلة الأولى، ثم عاد من ب إلى جـ فى المرحلة الثانية وبفرض أنَّ $\overrightarrow{ى}$ هو متجه الوحدة فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$.

زمن المرحلة الأولى = $\frac{ف}{ن}$ أى $ن_١ = \frac{٣٠}{١٨} = \frac{٥}{٣}$ ساعة،

زمن المرحلة الثانية $ن_٢ = \frac{٢٠}{١٥} = \frac{٤}{٣}$ ساعة.

الزمن الكلى للرحلة = $\frac{٥}{٣} + \frac{٤}{٣} = \frac{٩}{٣} = ٣$ ساعات

الإزاحة $\overrightarrow{ف} = ٣٠\overrightarrow{ى} - ٢٠\overrightarrow{ى} = ١٠\overrightarrow{ى}$

$\because \overrightarrow{ع_م} = \frac{\overrightarrow{ف}}{ن}$ $\quad\therefore \overrightarrow{ع_م} = \frac{١٠\overrightarrow{ى}}{٣} = ٣\frac{١}{٣}\overrightarrow{ى}$

أىْ أنَّ متجه السرعة المتوسطة له نفس اتجاه $\overrightarrow{ى}$ أى فى اتجاه $\overrightarrow{أب}$ ومعياره يساوى $٣\frac{١}{٣}$ كم / س.

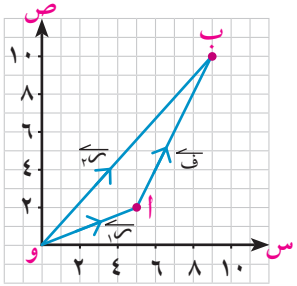
حاول أنْ تحل

(٦) قطع راكب دراجة مسافة ٢٥ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم / س ثم قطع مسافة ٧ كم فى نفس الاتجاه بسرعة ٧ كم / س. أوجد متجه السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.

مثال

(٥) تواجد جسيم عند لحظتين زمنيتين ٣، ٧ ثوان عند الموضعين أ (٥ ، ٢) ، ب (٩ ، ١٠) على الترتيب. أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية، ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة المتوسطة.

الحل



الشكل المقابل يمثل:

متجه الموضع الابتدائى $\overrightarrow{وا}$ ($\overrightarrow{ر_١}$) ،

متجه الموضع النهائى $\overrightarrow{وب}$ ($\overrightarrow{ر_٢}$) ،

متجه الإزاحة $\overrightarrow{أب}$ ($\overrightarrow{ف}$)

حيث: $\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ر_٢} - \overrightarrow{ر_١}$

$\overrightarrow{ف} = (٩ ، ١٠) - (٥ ، ٢)$

$\overrightarrow{ف} = (٤ ، ٨)$

$\because \overrightarrow{ع_م} = \frac{\overrightarrow{ف}}{ن_٢ - ن_١}$

$\therefore \overrightarrow{ع_م} = \frac{١}{(٣-٧)} (٤ \overrightarrow{س} + ٨ \overrightarrow{ص})$

$\overrightarrow{ع_م} = \overrightarrow{س} + ٢ \overrightarrow{ص}$ (الصورة المتجهة للسرعة المتوسطة)

$|| \overrightarrow{ع_م} || = \sqrt{(١)^٢ + (٢)^٢} = \sqrt{٥}$ وحدة سرعة

وتصنع زاوية قطبية مع $\overleftarrow{و س}$ طا$^{-١}$ ٢ أي ٦٣° ٢٦′ ٦″ .

حاول أنْ تحل

(٧) تواجد جسيم عند لحظتين زمنيتين ٣، ٨ ثوان عند الموضعين أ(٧، ٢) ، ب (٤، ٦) على الترتيب أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية، ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة.

السرعة النسبية *Relative velocity*

ماذا تلاحظ؟

- إذا جلست فى قطار يتحرك وأنت تشاهد من النافذة أعمدة الإنارة والأشجار على جانب الطريق.
- إذا ركبت سيارة تتحرك بسرعة فى اتجاه ما وأنت تشاهد السيارات الأخرى التى تتحرك فى نفس اتجاه سيارتك.
- إذا كانت السيارات الأخرى تتحرك عكس اتجاه سيارتك

نلاحظ مما سبق أن الحركة مفهوم نسبى يختلف من مشاهد لآخر فى موضع آخر، وفى جميع الحالات فإن المشاهد يرصد حركات الأجسام الأخرى باعتباره ساكنًا حتى، ولو كان غير ذلك فيرى هذه الأجسام تتحرك بسرعات ليست هى السرعات الفعلية لها، ولكنها سرعات نسبية.

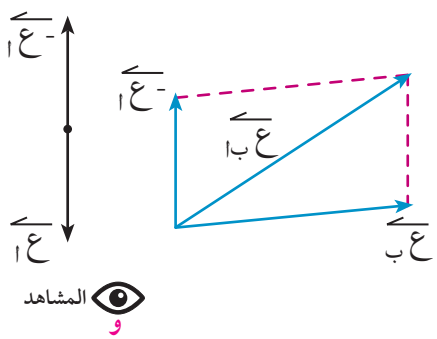
مفهوم السرعة النسبية:

السرعة النسبية لجسيم (أ) بالنسبة لجسيم آخر (ب) هى السرعة التى يبدو للجسيم (أ) أن يتحرك بها لو اعتبرنا الجسيم (ب) فى حالة سكون.

متجه السرعة النسبية:

باعتبار أن $\overrightarrow{ع_أ}$ ، $\overrightarrow{ع_ب}$ هما متجها سرعة لجسمين أ ، ب بالنسبة للمشاهد (و) وأن $\overrightarrow{ع_{ب أ}}$ هما متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ.

بإضافة (- $\overrightarrow{ع_أ}$) إلى كل من المتجهين $\overrightarrow{ع_أ}$ ، $\overrightarrow{ع_ب}$ للجسمين أ ، ب حيث يصبح أ ساكنًا و يصبح متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ هى ($\overrightarrow{ع_ب}$ - $\overrightarrow{ع_أ}$) أى أنَّ: $\overrightarrow{ع_{ب أ}} = \overrightarrow{ع_ب} - \overrightarrow{ع_أ}$



تفكير ناقد: إذا كان $\overrightarrow{ع_{ب ا}}$ هو متجه سرعة ب بالنسبة إلى أ ، $\overrightarrow{ع_{ا ب}}$ متجه سرعة أ بالنسبة إلى سرعة ب فاكتب العلاقة بين $\overrightarrow{ع_{ب ا}}$ ، $\overrightarrow{ع_{ا ب}}$

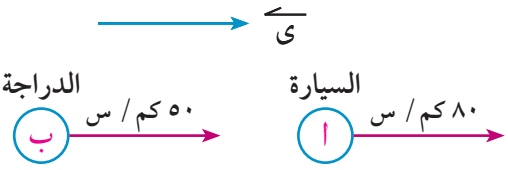
مثال

(٦) تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٨٠ كم/س. فإذا تحركت على نفس الطريق دراجة بخارية بسرعة ٥٠ كم / س. أوجد السرعة النسبية للدراجة البخارية بالنسبة للسيارة عندما تكون:

(أ) الدراجة تتحرك فى نفس اتجاه حركة السيارة. (ب) الدراجة تتحرك عكس اتجاه حركة السيارة.

الحل

نرمز للسيارة بالرمز أ وللدراجة بالرمز ب وبفرض أن $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة فى اتجاه حركة السيارة.



(أ) عندما تتحرك الدراجة فى نفس اتجاه حركة السيارة تكون:

$\overrightarrow{ع_{ب}} = ٥٠\ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع_{ا}} = ٨٠\ \overrightarrow{ى}$ ، سرعة الدراجة بالنسبة للسيارة $\overrightarrow{ع_{ب ا}} = ؟$

$\because \overrightarrow{ع_{ب ا}} = \overrightarrow{ع_{ب}} - \overrightarrow{ع_{ا}}$ $\therefore \overrightarrow{ع_{ب ا}} = ٥٠\ \overrightarrow{ى} - ٨٠\ \overrightarrow{ى} = -٣٠\ \overrightarrow{ى}$

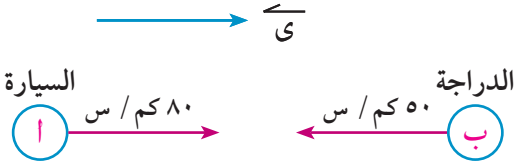
أىْ أنَّ الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة مبتعدة عن السيارة بسرعة مقدارها ٣٠ كم / س.

(ب) عندما تتحرك الدراجة فى عكس اتجاه السيارة:

$\overrightarrow{ع_{ب}} = ٥٠\ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع_{ا}} = ٨٠\ \overrightarrow{ى}$ ،

$\because \overrightarrow{ع_{ب ا}} = \overrightarrow{ع_{ب}} - \overrightarrow{ع_{ا}}$

$\therefore \overrightarrow{ع_{ب ا}} = -٥٠\ \overrightarrow{ى} - ٨٠\ \overrightarrow{ى} = -١٣٠\ \overrightarrow{ى}$



أىْ أنَّ الدراجة تبدو لراكب السيارة وكأنها متحركة نحوه بسرعة ١٣٠ كم/ س.

حاول أنْ تحل

(٨) تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٧٢ كم/ س. فإذا تحركت على الطريق نفسه دراجة بخارية بسرعة ٢٨ كم / س. فأوجد السرعه النسبية للدراجة البخارية بالنسبة للسيارة عندما:

(أ) الدراجة تتحرك فى نفس اتجاه حركة السيارة.

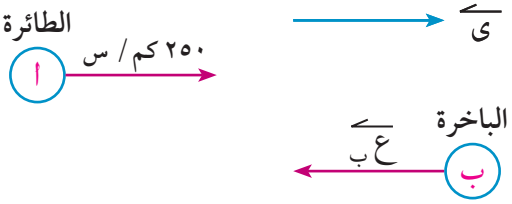
(ب) الدراجة تتحرك فى عكس اتجاه حركة السيارة.

مثال

(٧) تتحرك باخرة فى مسار مستقيم نحو ميناء ولما صارت على مسافة ١٠٠ كم منه مرت فوقها طائرة حراسة فى الاتجاه المضاد بسرعة ٢٥٠ كم / س ورصدت حركة الباخرة فبدت لها متحركة بسرعة ٣٠٠ كم / س. احسب الزمن الذى يمضى من لحظة الرصد حتى وصول الباخرة إلى الميناء.

الحل

نرمز للباخرة بالرمز ب وللطائرة بالرمز أ ونفرض أن $\overrightarrow{ي}$ متجه وحدة له نفس اتجاه حركة الطائرة.



وأن السرعة الفعلية للباخرة $\overrightarrow{ع_ب}$ (فى اتجاه مضاد لحركة الطائرة)

$\therefore \overrightarrow{ع_أ} = ٢٥٠ \overrightarrow{ي}$ ، $\overrightarrow{ع_{ب أ}} = -٣٠٠ \overrightarrow{ي}$

$\because \overrightarrow{ع_{ب أ}} = \overrightarrow{ع_ب} - \overrightarrow{ع_أ}$ $\therefore -٣٠٠ \overrightarrow{ي} = \overrightarrow{ع_ب} - ٢٥٠ \overrightarrow{ي}$

أىْ أنَّ $\overrightarrow{ع_ب} = -٥٠ \overrightarrow{ي}$

أىْ أنَّ السرعة الفعلية للباخرة مقدارها ٥٠ كم / س ويعمل فى الاتجاه المضاد لحركة الطائرة.

$\because$ ف = ع ن $\therefore$ ١٠٠ = ٥٠ ن **أىْ أنَّ** ن = ٢ ساعة

حاول أنْ تحل

(٩) تتحرك سيارة رادار لمراقبة السرعة على الطريق الصحراوى بسرعة ٤٠ كم / س. راقبت هذه السيارة حركة سيارة نقل قادمة فى الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١٢٠ كم / س فما هى السرعة الفعلية لسيارة النقل؟

تمـارين الدرس الأول

أكمل مايأتى:

(١) ٢٠ م / ث = ... كم / س (٢) ٩٠ كم / س = ... م / ث

(٣) تتحرك سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٧٢ كم / س لمدة ربع ساعة فإن المسافة المقطوعة = ... كم.

(٤) إذا كان $\overrightarrow{ع_أ}$ = ١٥ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع_ب}$ = ٢٢ $\overrightarrow{س}$ فإن $\overrightarrow{ع_{ب أ}}$ = ...

(٥) إذا كان $\overrightarrow{ع_{أب}}$ = ٦٥ $\overrightarrow{ي}$ ، $\overrightarrow{ع_أ}$ = ٥٠ $\overrightarrow{ي}$ فإن $\overrightarrow{ع_ب}$ = ...

(٦) يتحرك راكب دراجة أ على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم / س ويتحرك فى نفس الاتجاه راكب آخر ب بسرعة ١٢ كم / س فإن سرعة ب بالنسبة إلى أ تساوى كم / س.

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(٧) إذا تحركت سيارة بسرعة منتظمة مقدارها ٧٥ كم / س لمدة ٢٠ دقيقة فإن المسافة المقطوعة بـ كم تساوى:

أ ١٥ ب ٢٠ ج ٢٥ د ٣٠

(٨) الزمن بالساعة الذي تستغرقه سيارة تتحرك بسرعة ٢٠ متر / ث فى قطع مسافة ١٨٠ كم يساوى:

أ $١\frac{١}{٢}$ ب ٢ ج $٢\frac{١}{٢}$ د ٣

(٩) إذا كان $\overrightarrow{ع_{ا ب}} = ١٥$ سـ ، $\overrightarrow{ع_{ا}} = ٣٥$ سـ فإن $\overrightarrow{ع_{ب}}$ تساوى:

أ -٥٠ سـ ب -٢٠ سـ ج ٢٠ سـ د ٥٠ سـ

(١٠) إذا كان متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة و يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة:

$\overrightarrow{ر} = (٢ن^{٢} + ٣)\ \overrightarrow{ى}$ فإن معيار متجه الإزاحة $\overrightarrow{ف}$ بعد ٢ ثانية يساوى:

أ ٤ ب ٦ ج ٨ د ١١



(١١) دخل قطار طوله ١٥٠ مترًا نفقًا مستقيمًا طوله ف متر فاستغرق عبوره بالكامل من النفق فى زمن قدره ١٥ ثانية أوجد طول النفق إذا كانت سرعة القطار منتظمة وتساوى ٩٠ كم / س.

(١٢) قطع راكب دراجة ٣٠ كم على طريق مستقيم بسرعة ١٥ كم / س ثم عاد فقطع ١٠ كم فى الاتجاه المعاكس بسرعة ١٠ كم / س أوجد متجه سرعته المتوسطة خلال الرحلة كلها.

(١٣) سار رجل على طريق مستقيم فقطع ٨٠٠ متر بسرعة ٩ كم / س ، وقطع نفس المسافة فى نفس الاتجاه بسرعة ٤,٥ كم / س. أوجد مقدار السرعة المتوسطة للرجل خلال الرحلة كلها.

(١٤) مدينتان أ ،ب على الطريق الساحلى المسافة بينهما ١٢٠ كم، تحركت سيارة من المدينة أ متجهه إلى المدينة ب بسرعة ٨٨ كم / س. وفى نفس اللحظة قامت سيارة أخرى من المدينة ب متجهة إلى المدينة أ بسرعة ٧٢ كم / س أوجد متى وأين تتقابل السيارتان.

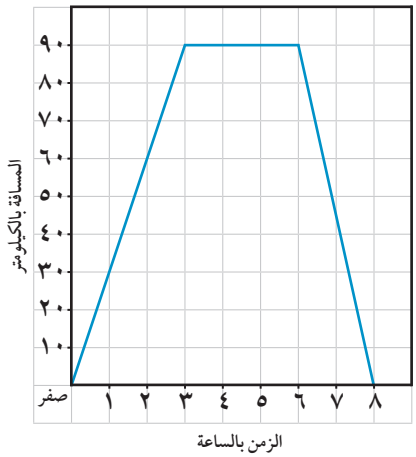
(١٥) تتحرك سيارة أ على طريق مستقيم بسرعة ٦٠ كم / س وتتحرك سيارة ب على نفس الطريق بسرعة ٩٠ كم / س. أوجد سرعة السيارة أ بالنسبة للسيارة ب إذا كانت:

أ السيارتان تتحركان فى اتجاهين متضادين. ب السيارتان تتحركان فى اتجاه واحد.

(١٦) قامت سيارة شرطة متحركة بسرعة منتظمة على طريق أفقى بقياس السرعة النسبية لشاحنة تتحرك أمامها وفى نفس الاتجاه فوجدتها ٦٠ كم / س ولما زيدت سرعة سيارة الشرطة إلى الضعف وأعادت القياس فبدت الشاحنة وكأنها ساكنة.

أوجد السرعة الفعلية لكل من سيارة الشرطة والشاحنة.

نشاط (١)



(١٧) يمثل الشكل المقابل العلاقة بين المسافة بالكيلو متر والزمن بالساعة لمسار دراجه بخارية تتحرك بين مدينتين. أجب عما يلى :

أ ما مقدار السرعة المتوسطة للدراجة فى أثناء الذهاب؟

ب ما مقدار السرعة المتوسطة للدراجة فى أثناء العودة؟

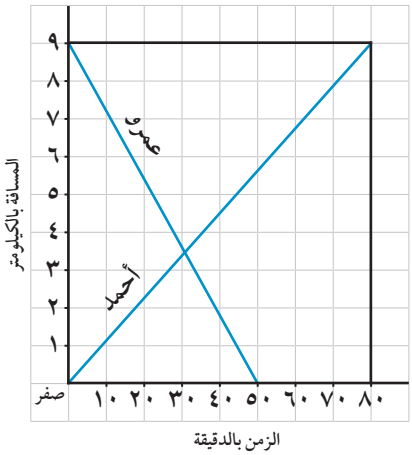
ج ما دلالة القطعة المستقيمة الأفقية فى الشكل.

(١٨) تحركت دراجة بخارية فوجد أنها بعد دقيقة واحدة أصبحت على بعد ٢ كم من نقطة أ، وبعد ٣ دقائق أصبحت على بعد ٥ كم من نفس النقطة. ارسم شكلًا بيانيًّا يمثل العلاقة بين المسافة والزمن لهذه الدراجة ومن الرسم:

أ أوجد سرعة الدراجة.

ب اكتب العلاقة الرياضية بين الزمن (ن) والمسافة (ف).

نشاط (٢)



(١٩) يوضح الشكل المقابل مسار حركة كل من أحمد وعمرو فى قطع المسافة بين قريتين، أحدهما فى القرية الأولى، والآخر فى القرية الثانية.

أ هل بدء أحمد وعمرو الحركة فى توقيت واحد؟ فسِّر إجابتك.

ب بعد كم دقيقة التقى أحمد وعمرو؟

ج ما الزمن الذى استغرقه أحمد فى قطع المسافة؟

د أوجد سرعة عمر.

هـ إذا بدأ عمرو التحرك الساعة ٣٠ق:٩س صباحًا فمتى يصل إلى القرية الأخرى.

(٢٠) إذا كان متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة و $\overrightarrow{س}$ يعطى كدالة فى الزمن ن بالعلاقة: $\overrightarrow{س} = (ن^{٢} + ٣ن - ٢)\overrightarrow{س}$ حيث $\overrightarrow{س}$ متجه وحدة ثابت. أوجد متجه الإزاحة بعد ٤ ثوان.

(٢١) تواجد جسيم عند لحظتين زمنيتين مقدارهما ٣، ٨ ثوان عند الموضعين أ(٤، ٣) ، ب (١٢ ، ٩) على الترتيب. أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية، ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة المتوسطة.

(٢٢) تفكير إبداعى: يتحرك رجل على كوبرى أب ، وعندما قطع $\frac{٣}{٨}$ طول الكوبرى من جهة أ سمع صوت صفير قطار يتحرك خلفه بسرعة منتظمة مقدارها ٦٠ كم س نحو نقطة أفإذا تحرك الرجل نحو القطار فإن القطار سيصدمه عند نقطة أمباشرة أوجد أقل سرعة منتظمة يتحرك بها الرجل قبل أن يصدمه القطار مباشرة عند نقطة ب.

الدرس ٢

الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة

Uniformly accelerated rectilinear motion

سوف تتعلم

- التسارع.
- منحنى السرعة – الزمن.
- الحركة منتظمة التغير.
- العلاقة بين السرعة – الزمن.
- العلاقة بين المسافة – الزمن.
- العلاقة بين السرعة – المسافة.

المصطلحات الأساسيّة

- تسارع Acceleration
- حركة منتظمة التغير Uniform acceferation motion
- عجلة منتظمة Uniform acceleration
- تقصير منتظم Uniform deceleration

الأدوات والوسائل

- ورق مربعات
- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

تمهيد:

سبق أن درست الحركة المنتظمة فى خط مستقيم وبسرعة ثابتة، ومن الملاحظ أن عددًا قليلًا من الأجسام يتحرك بهذه الطريقة لوقت طويل، فمن الملاحظ أن كل سيارة يوجد بها ثلاث أدوات تتحكم فى سرعتها وهى دواسة الوقود ودواسة الفرامل، ثم عجلة القيادة التى تتحكم فى اتجاه حركتها، كذلك نلاحظ التغير فى سرعة الأجسام فى أثناء سقوطها وفى أثناء قذفها إلى أعلى.

تعريف ١

الحركة المستقيمة المتغيرة: هى الحركة التى يحدث فيها تغيير فى قيمة السرعة بمرور الزمن يسمى بالتسارع (العجلة) ووحدة قياسه هى م / ث^{٢}.

$$\text{التسارع (جـ)} = \frac{\text{السرعة النهائية - السرعة الابتدائية}}{\text{الزمن}}$$

ووحدات قياسه = م / ث^{٢} أو سم / ث^{٢} أو كم / س^{٢}

كما يلاحظ أن:

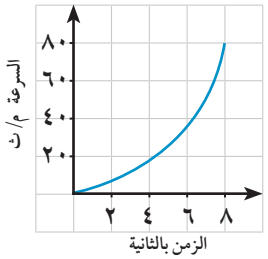
إذا كان التغير فى السرعة عند لحظة زمنية محددة فيسمى التسارع اللحظي.

منحنى (السرعة - الزمن) *Velocity-Time curve*

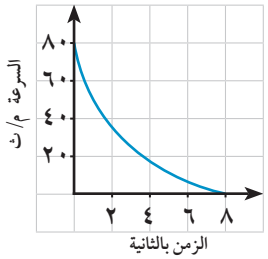
يرتبط مفهوم التسارع بتغير السرعة فإذا ازدادت قيمة السرعة مع الزمن نقول: إن الحركة متسارعة، ويكون التسارع (العجلة) موجبًا (باعتبار السرعة موجبة) كما فى شكل (١).

و إذا تناقصت قيمة السرعة مع الزمن فنقول: إن الحركة تقصيرية، ويكون التسارع (العجلة) سالبًا كما فى شكل (٢).

و إذا بقيت السرعة ثابتة مع الزمن نقول: إن الحركة منتظمة.



شكل (١)



شكل (٢)

الحركة منتظمة التغير: *Uniformly accelerated motion*

يقال إن الجسيم يتحرك حركة منتظمة التغير أو بتسارع (عجلة) منتظم إذا كان متجه العجلة ثابتًا مقدارًا واتجاهًا لجميع الأزمنة.

تعبير شفهي: ماذا تعنى كل من العبارات الآتية:

أ مقدار سرعة جسيم تزداد فى أثناء حركته زيادة منتظمة بمعدل ٤م / ث^{٢}.

ب مقدار سرعة جسيم تتناقص في أثناء حركة تناقص منتظم بمعدل ٢٤ كم / س^{٢}.

مثال

١ إذا تغيرت سرعة سيارة تتحرك فى خط مستقيم من ٥٠ كم / س إلى ٦٨ كم / س خلال عشر ثوان، وتحركت سيارة نقل من السكون حتى أصبحت سرعتها ١٨ كم / س خلال هذه المدة. أيهما يتحرك بتسارع أكبر ؟ فسر إجابتك.

الحل

يتضح من بيانات المسألة أن كلًّا من السيارة ، سيارة النقل قد حدث لهما زيادة فى السرعة بمقدار ١٨ كم / س (أى ٥م / ث) خلال فترة زمنية قدرها ١٠ ثوان.

أىْ أنَّ التسارع الذى تتحرك به كل منهما ثابت.

$$\therefore \text{جـ} = \frac{\text{التغير فى السرعة}}{\text{الفترة الزمنية}} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢} \text{ م / ث}^{٢}$$

حاول أنْ تحل

١ إذا تغيرت سرعة سيارة (أ) تتحرك فى خط مستقيم من ٢٤ كم / س إلى ٣٦ كم / س خلال ٥ ثوان، وتغيرت سرعة سيارة (ب) تتحرك فى نفس الخط المستقيم من ١٢ كم / س إلى ٣٠ كم / س خلال نفس المدة. أيهما يتحرك بتسارع أكبر ؟ فسِّر إجابتك.

معادلات الحركة منتظمة التغير *Equations of the change uniforme motion*

توجد ثلاث معادلات أساسية تربط بين المسافة والسرعة والعجلة والزمن فى حالة الحركة بتسارع منتظم وهى:

أولاً: العلاقة بين السرعة والزمن:

إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم بمتجه سرعة ابتدائية $\overrightarrow{ع_{.}}$ ومتجه عجلة ثابتة $\overrightarrow{جـ}$ وأصبح متجه سرعته $\overrightarrow{ع}$ بعد فترة زمنية (ن) فإن:

$$\overrightarrow{جـ} = \frac{\overrightarrow{ع} - \overrightarrow{ع_{.}}}{ن}$$

أىْ أنَّ: $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ع_{.}} + \overrightarrow{جـ}\,ن$

أىْ أنَّ: $\overrightarrow{ع} = \overrightarrow{ع_{.}} + \overrightarrow{جـ}\,ن$ حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه الوحدة فى اتجاه الحركة.

بأخذ القياس الجبري تكون. $ع = ع_{.} + جـ\,ن$

لاحظ أن:

- العلاقة تربط بين أربعة مجاهيل يمكن إيجاد إحداها بمعلومية الثلاثة الآخرين.
- إذا بدأ الجسم حركته من سكون فإن ع$_{.}$ = ٠ وتكون ع = جـ ن
- إذا كان جـ = ٠ فإن ع = ع$_{.}$ أىْ أنَّ الجسم يتحرك بسرعة منتظمة.

مثال

(٢) بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ٩سم / ث وبعجلة منتظمة قدرها ٣سم / ث^{٢} تعمل فى نفس اتجاه السرعة الابتدائية. أوجد:

أ سرعة الجسيم بعد ٥ ثوان من بدء الحركة.

ب الزمن الذى يمضى من بدء الحركة حتى تصبح سرعته ٥٤ سم / ث.

الحل

أ نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الجسيم.

من بيانات المسألة: ع$_{.}$ = ٩سم / ث ، جـ = ٣سم / ث^{٢} ، ن = ٥ ثوان

∵ ع = ع$_{.}$ + جـ ن ∴ ع = ٩ + ٣ × ٥ ∴ ع = ٢٤ سم / ث

ب ∵ ع = ع$_{.}$ + جـ ن ∴ ٥٤ = ٩ + ٣ ن ∴ ن = ١٥ ثانية.

حاول أنْ تحل

(٢) بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ٢٠سم / ث وبعجلة منتظمة ٥سم / ث^{٢} تعمل فى نفس اتجاه متجه السرعة الابتدائية. أوجد:

أ سرعته فى نهاية دقيقة واحدة من بدأ الحركة.

ب الزمن الذى يمضى من بدء الحركة حتى تصبح سرعته ١٨ كم / س.

مثال

(٣) يتحرك جسيم فى خط مستقيم فتغيرت سرعته من ٥٤ كم / س الى ٣ م / ث فى زمن قدره نصف دقيقة. أوجد مقدار عجلة الحركة. هل يمكن لهذا الجسيم أن يسكن لحظيًّا؟ فسِّر إجابتك.

الحل

٥٤ كم / س = $\frac{٥}{١٨}$ × ٥٤ = ١٥ م / ث

"من بيانات المسألة" ع$_{.}$ = ١٥ م / ث ، ع = ٣م / ث ، ن = ٣٠ ثانية

∵ ع = ع$_{.}$ + جـ ن ∴ ٣ = ١٥ + ٣٠ جـ

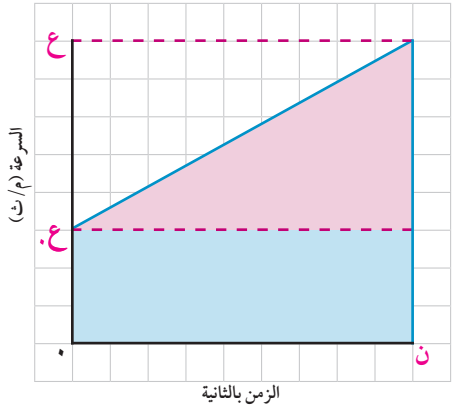
أىْ أنَّ: ٣٠ جـ = - ١٢ ∴ جـ = - ٠,٤ م / ث^{٢}

∵ جـ < ٠ يمكن لهذا الجسيم أن يسكن لحظيًّا لأن يتحرك حركة تقصيرية.

٩ حاول أنْ تحل

(٣) تتحرك سيارة فى خط مستقيم فتناقصت سرعتها من ٦٣ كم / س إلى ٣٦ كم / س فى زمن قدره نصف دقيقة. أوجد العجلة التى تتحرك بها السيارة والزمن الذى يمضى بعد ذلك حتى تسكن لحظيًا.

ثانيًا: العلاقة بين المسافة و الزمن *The relation between displacement and time*



المساحة تحت منحنى (السرعة - الزمن) تساوى إزاحة الجسم.

فى الشكل المقابل الجسم يتحرك بعجلة منتظمة مبتدئا بسرعة ابتدائية ع. وبعد زمن ن ثانية أصبحت سرعته النهائية ع.

المساحة تحت المنحنى يمكن حسابها عن طريق تقسيمها إلى مستطيل ومثلث.

المساحة (ف) = مساحة المستطيل + مساحة المثلث

$= ع_{.} ن + \frac{1}{2} ن (ع - ع_{.})$

$ف = ع_{.} ن + \frac{1}{2} ن (ع_{.} + جـ ن - ع_{.})$ (وذلك بالتعويض من القانون الأول: $ع = ع_{.} + جـ ن$)

$$ف = ع_{.} ن + \frac{1}{2} جـ ن^{2}$$

تعبير شفهى:

١- اكتب صيغة قانون (المسافة - الزمن) عندما يبدأ الجسم حركته من سكون.

٢- اكتب صيغة القانون السابق عندما جـ = ٠ ، وبم تفسر نوع الحركة فى هذه الحالة؟

مثال

(٤) سيارة تتحرك بسرعة ٩٠ كم / س ، ضغط السائق على دواسة الفرامل، بحيث تناقصت السرعة بمعدل ثابت حتى توقفت السيارة بعد مرور ٥ ثوان. احسب:

أ عجلة السيارة خلال تناقص السرعة.

ب المسافة التى قطعتها السيارة حتى توقفت حركتها تمامًا.

الحل

أ لتحويل السرعة من كم/س إلى متر / ث : ٩٠ كم / س = $٩٠ \times \frac{٥}{١٨}$ = ٢٥ م / ث

بالتطبيق فى القانون: $ع = ع_{.} + جـ ن$ حيث $ع_{.}$ = ٢٥ م / ث ، ع = ٠ ، ن = ٥ ثوان

∴ ٠ = ٢٥ + ٥ جـ أىْ أنَّ جـ = - ٥ م / ث^{2}

أىْ أنَّ السيارة تتحرك بتقصير منتظم مقداره ٥م / ث^{2}.

ب ∵ $ف = ع_{.} + \frac{1}{2} جـ ن^{2}$

∴ $ف = ٢٥ \times ٥ + \frac{1}{2} (-٥) \times ٢٥ = ٦٢,٥$ مترًا.

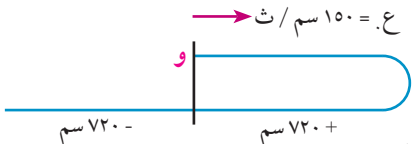
لاحظ أن

عندما يقف الجسم فإن ع = ٠

مثال

(٥) تحركت كرة صغيرة بسرعة ١٥٠سم / ث على مستوى أفقى فتحركت فى خط مستقيم بتقصير منتظم مقداره ١٥سم/ث^{٢}. أوجد الزمن الذى يمضى من لحظة تحرك الكرة حتى تصبح على بعد ٧٢٠ سم من بداية الحركة.

الحل



نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه سرعة الكرة ع.

∴ ع. = ١٥٠ سم / ث. ، جـ = - ١٥ سم / ث

وعندما تكون الكرة على بعد ٧٢٠ سم من نقطة بدء الحركة (و) فإن:

ف = + ٧٢٠ أو ف = - ٧٢٠ حيث إن ف الموجبة تعنى أن حركة الكرة تقع فى اتجاه الإزاحة الموجبة ، ف السالبة تعنى أن الكرة تحركت فى الاتجاه المضاد.

أولاً: عندما تكون ف = ٧٢٠سم ، ع. = ١٥٠سم / ث ، جـ = - ١٥سم / ث^{٢}

∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} ∴ ٧٢٠ = ١٥٠ن - $\frac{١}{٢}$ × ١٥ ن^{٢}

وبالتبسيط: ن^{٢} - ٢٠ن + ٩٦ = ٠

بالتحليل: (ن - ٨) (ن - ١٢) = ٠ **أىْ أنَّ:** ن = ٨ ثانية أو ن = ١٢ ثانية

أىْ أنَّ الكرة تكون على بعد ٧٢٠ سم من نقطة بدء الحركة مرتين:

بعد مضى ٨ ثوان من بدء الحركة قبل أن تغير الكرة اتجاه حركتها.

بعد مضى ١٢ ثانية من بدء الحركة بعد أن تغير الكرة اتجاه حركتها.

لاحظ أن

إذا تحرك جسيم بتقصير منتظم فإنه يستمر فى الحركة لفترة زمنية محدودة، ثم يتوقف أو بعدها يتحرك حركة متسارعة فى الاتجاه المضاد.

ثانيًا: عندما تكون ف = - ٧٢٠ سم

∵ ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} ∴ - ٧٢٠ = ١٥٠ ن - $\frac{١}{٢}$ × ١٥ ن^{٢}

وبالتبسيط: ن^{٢} - ٢٠ ن - ٩٦ = ٠

وبالتحليل: (ن - ٢٤) (ن + ٤) = ٠ ∴ ن = ٢٤ ثانية

أىْ أنَّ الكرة تكون على بعد ٧٢٠ سم من موضع نقطة بدء الحركة من جهة الإزاحة السالبة بالنسبة لموضع بدء الحركة بعد مرور ٢٤ ثانية.

حاول أنْ تحل

(٤) بدأت كرة صغيرة الحركة بسرعة ٥ م / ث على مستوى أفقى فتحركت فى خط مستقيم بتقصير منتظم مقداره ٢م / ث^{٢}. أوجد الزمن الذى يمضى من لحظة قذف الكرة حتى تصبح على بعد ٦ أمتار من نقطة القذف.

ثالثًا: العلاقة بين السرعة والإزاحة

The relation between the displacement and velocity

نعلم أن: ع = ع. + جـ ن (١) ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢} (٢)

بتربيع المعادلة الأولى: ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ ع. جـ ن + جـ^{٢} ن^{٢} وأخذه عامل مشترك.

∴ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ جـ (ع. ن + $\frac{١}{٢}$ جـ ن^{٢}) بالتعويض من المعادلة (٢) عن قيمة ف

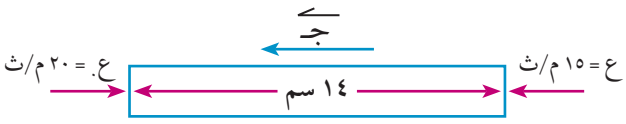
$$ع^{٢} = ع_{.}^{٢} + ٢ جـ ف$$

مثال

(٦) أطلقت رصاصة بسرعة ٢٠م/ث فى اتجاه عمودى على حائط رأسى سمكه ١٤سم فخرجت منه بسرعة ١٥م/ث. أوجد مقدار العجلة التقصيرية ، و إذا أطلقت الرصاصة بنفس السرعة على حائط رأسى آخر مماثل فأوجد المسافة التى تغوصها حتى تسكن، علمًا بأن العجلة التى تتحرك بها الرصاصة واحدة فى الحالتين.

الحل

نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه حركة الرصاصة.

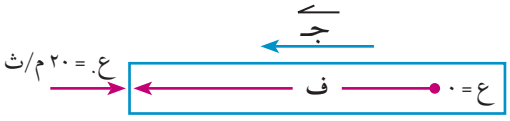


الحالة الأولى: ع. = ٢٠م / ث، ع = ١٥ م / ث ، ف = ١٤,٠ م

∵ $ع^{٢} = ع_{.}^{٢} + ٢ جـ ف$ ∴ $(١٥)^{٢} = (٢٠)^{٢} + ٢ \times جـ \times ١٤,٠$

وبالتبسيط: جـ = - ٦٢٥ م / ث٢

الحالة الثانية:



ع. = ٢٠م / ث ، ع = ٠ جـ = - ٦٢٥ م / ث٢

∵ $ع^{٢} = ع_{.}^{٢} + ٢ جـ ف$ ∴ $٠ = (٢٠)^{٢} - ٢ \times ٦٢٥ ف$

∴ ف = ٠,٣٢ متر أىْ أنَّ الرصاصة تغوص فى الحائط مسافة ٣٢ سم حتى تسكن.

حاول أنْ تحل

(٥) نقصت سرعة سيارة بانتظام من ٤٥ كم / س إلى ١٨ كم / س بعد أن قطعت مسافة ٦٢٥ مترًا. أوجد المسافة التى تقطعها بعد ذلك حتى تسكن.

(٦) أطلقت رصاصة أفقيًا على كتلة خشبية بسرعة ١٠٠م / ث فغاصت فيها مسافة ٥٠سم. أوجد العجلة التى تتحرك بها الرصاصة إذا علم أن العجلة منتظمة ، و إذا تم إطلاقها على كتلة خشبية أخرى مماثلة للأولى سمكها ١٨سم. فما هى السرعة التى تخرج بها الرصاصة من الكتلة الخشبية.

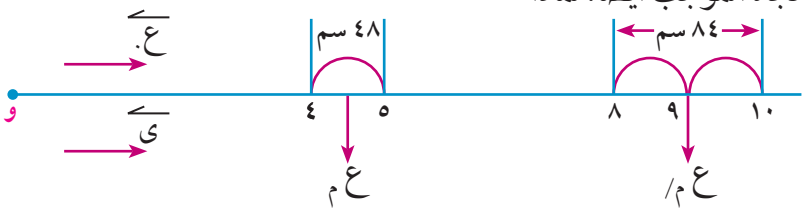
مثال

السرعة المتوسطة خلال الثانية النونية: *The average velocity within n^{th} second*

(٧) تحرك جسيم بسرعة ابتدائية ما فى اتجاه ثابت وبعجلة منتظمة ، فإذا قطع فى الثانية الخامسة من حركته ٤٨سم، وقطع فى الثانيتين التاسعة والعاشرة ٨٤سم. احسب العجلة التى تحرك بها الجسيم والسرعة الابتدائية له.

الحل

يعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه السرعة الابتدائية فيكون اتجاه العجلة هو الاتجاه الموجب أيضًا. لماذا؟



لاحظ أن

السرعة المتوسطة لجسيم خلال فترة زمنية ما تساوى سرعته اللحظية فى منتصف هذه الفترة فمثلا:

السرعة المتوسطة خلال الثانية الرابعة = ع. + ٣,٥ جـ

السرعة المتوسطة خلال الثانيتين الثامنة والتاسعة = ع. + ٨حـ

السرعة المتوسطة خلال الثانية الخامسة = المسافة / الزمن أى أنَّ: ع م = ٤٨ / ١ = ٤٨سم / ث وهى السرعة بعد ٤ ١/٢ ثانية ،

السرعة المتوسطة خلال الثانيتين التاسعة والعاشرة ع م = ٨٤ / ٢ = ٤٢سم / ث وهى السرعة بعد ٩ ثوان

∵ العجلة (جـ) = التغير فى السرعة / الفترة الزمنية ∴ جـ = (٤٢ - ٤٨) / (٩ - ٤,٥) = -٤ / ٣ سم / ث٢

أىْ أنَّ الجسم يتحرك حركة تقصيرية بعجلة = ٤/٣ سم / ث٢.

∵ ع = ع. + جـ ن ∴ ٤٨ = ع. + (-٤/٣) × ٤ ١/٢

∴ ٤٨ = ع. - ٦ ∴ ع. = ٥٤ سم / ث.

حاول أنْ تحل

(٧) بدأ جسيم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ٣٠سم / ث وعجلة منتظمة ٦سم / ث٢ فى نفس اتجاه سرعته. احسب:

أ المسافة المقطوعة بعد ٥ ثوان من بدء الحركة.

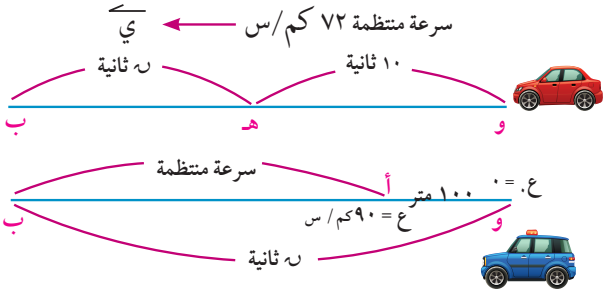
ب المسافة المقطوعة فى الثانية الخامسة فقط.

(٨) تحرك جسيم بسرعة ابتدائية ما فى اتجاه ثابت وبعجلة منتظمة، فإذا قطع فى الثانية الثالثة من حركته مسافة ٢٠مترًا ، ثم قطع فى الثانيتين الخامسة والسادسة معًا مسافة ٦٠ مترًا. احسب العجلة التى تحرك بها الجسيم وسرعته الابتدائية.

(٩) يتحرك مترو الأنفاق فى خط مستقيم بين محطتين أ ، ب المسافة بينهما ٧٠٠ متر، حيث يبدأ من المحطة أ من السكون بعجلة منتظمة ٢م/ث٢ لمدة ١٠ ثوان ثم يسير بعد ذلك بسرعة منتظمة فترة من الزمن، ثم يقطع مسافة ٦٠ مترًا الأخيرة من حركته بتقصير منتظم حتى يقف فى المحطة ب. أوجد الزمن الذى يستغرقه فى قطع المسافة بين المحطتين.

مثال

(٨) تتحرك سيارة بسرعة منتظمة ٧٢ كم / س. مرت بسيارة شرطة فبدأت سيارة الشرطة فى متابعتها بعد ١٠ ثوان من مرورها متحركة بعجلة منتظمة مسافة ١٠٠ متر حتى بلغت سرعتها ٩٠ كم / س ، ثم سارت بهذه السرعة حتى لحقت بالسيارة الأولى. أوجد الزمن الذى استغرقته عملية المطاردة منذ لحظة تحرك سيارة الشرطة والمسافة التى قطعتها هذه السيارة.



الحل

نعتبر الاتجاه الموجب هو اتجاه السرعة المنتظمة وأن سيارة الشرطة كانت ساكنة عند نقطة و ، ثم قطعت مسافة ١٠٠ متر حتى وصلت إلى أ حيث أصبحت سرعتها ٩٠ كم / س ثم سارت بها بانتظام حتى لحقت بالسيارة الأولى عند ب.

٧٢ كم/س = ٥/١٨ × ٧٢ = ٢٠ متر/ث ، ٩٠كم/س = ٥/١٨ × ٩٠ = ٢٥ متر/ث

بالنسبة لسيارة الشرطة في الفترة من و ⟵ أ

ع$_{.}$ = ٠ ، ع = ٢٥ م / ث ، ف = ١٠٠ متر ع^{٢} = ع$_{.}^{٢}$ + ٢ حـ ف

٢٥ × ٢٥ = ٢ × حـ × ١٠٠ ∴ حـ = $\frac{٢٥}{٨}$ م / ث^{٢}

ع = ع$_{.}$ + حـ ن ∴ ٢٥ = $\frac{٢٥}{٨}$ ن ∴ ن = ٨ ثانية

∴ المسافة التي تتحركها سيارة الشرطة بسرعة منتظمة = ٢٥ (ن - ٨) متر

، تكون السيارة المطاردة قطعت المسافة و ب في زمن قدره = (ن + ١٠) ثانية

، تكون سيارة الشرطة قطعت نفس المسافة و ب في زمن قدره = ن ثانية

∴ ٢٠ (ن + ١٠) = ١٠٠ + ٢٥ (ن - ٨) ⟸ ن = ٦٠ ثانية

المسافة المقطوعة = ٢٠ × ٧٠ = ١٤٠٠ متر

تمـــاريـن الدرس الثاني

(١) أكمل مايأتي:

أ يتحرك جسيم فى خط مستقيم من السكون بعجلة منتظمة مقدارها ٤م / ث^{٢} فإن سرعته بعد ٦ ثوان من بدء الحركة = ... م / ث.

ب المسافة التى يقطعها جسيم يتحرك فى اتجاه ثابت من السكون بعجلة مقدارها ٥سم / ث^{٢} فى زمن قدره ٤ ثوان = ... سم.

ج السرعة المتوسطة لجسيم يتحرك بسرعة ابتدائية ع$_{.}$ وعجلة منتظمة جـ خلال الثانية السادسة من حركته = ...

د السرعة المتوسطة لجسيم يتحرك بسرعة ابتدائية ع$_{.}$ وعجلة منتظمة جـ خلال الثوانى السابعة والثامنة والتاسعة = ...

هـ يتحرك جسيم من السكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع ٢٤ مترًا فى الثوانى الأربع الأولى من حركته ، فإن مقدار عجلته = ...

و بدأ جسيم حركته من السكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها ٢سم / ث^{٢} فقطع مسافة ٢٥سم ، فإن سرعته فى نهاية تلك المسافة = ... سم / ث.

(٢) انطلقت سيارة من السكون بتسارع مقداره ٤م / ث^{٢}. ما المسافة التى تقطعها السيارة عندما تصبح سرعتها ٢٤م / ث؟

(٣) تسير سيارة سباق فى الحلبة بسرعة ٤٤م / ث ثم تناقصت سرعتها بمعدل ثابت حتى أصبحت ٢٢م / ث خلال ١١ ثانية. أوجد المسافة التى قطعتها السيارة خلال هذا الزمن.

(٤) تتسارع سيارة بمعدل ثابت من ١٥م / ث إلى ٢٥م / ث. ما الزمن الذى تستغرقه لتصل إلى هذه السرعة علمًا بأنها قطعت مسافة ١٢٥ مترًا ؟

(٥) يتحرك راكب دراجة بعجلة منتظمة حتى صارت سرعته ٧,٥ م / ث خلال ٤,٥ ثانية. فإذا كانت إزاحة الدراجة خلال فترة التسارع تساوى ١٩ مترًا. أوجد السرعة الابتدائية للدراجة.

(٦) يتدرب كريم على ركوب الدراجة يدفعه والده فيكتسب تسارعًا ثابتًا مقداره $\frac{١}{٣}$م / ث^{٢} لمدة ٦ ثوان وبعد ذلك يقود كريم الدراجة بمفرده بسرعة ٣م / ث لمدة ٦ ثوان أخرى قبل أن يسقط أرضًا. أوجد مقدار المسافة التى يقطعها كريم.

(٧) هبط راكب دراجة من قمة تل منحدرًا بعجلة ثابتة مقدارها ٢م / ث^{٢} وعندما وصل إلى قاعدة التل بلغت سرعته ١٨م / ث ثم استخدم الفرامل حتى يحافظ على هذه السرعة لمدة دقيقة واحدة. أوجد المسافة الكلية التى قطعها راكب الدراجة.

(٨) قائد سيارة يتحرك بسرعة ثابتة مقدارها ٢٤م / ث ، شاهد فجأة طفل يمر فى الشارع ، فإذا كان الزمن اللازم لاستجابة الفرامل هو $\frac{١}{٢}$ ثانية تحركت فيه السيارة بتقصير منتظم مقدارها ٩,٦م / ث^{٢} حتى وقفت أوجد المسافة الكلية التى تحركتها السيارة قبل أن تقف مباشرة.

(٩) بدأ جسم حركته من السكون فى خط مستقيم أفقى بعجلة منتظمة مقدارها ٤سم / ث^{٢} لمدة ٣٠ ثانية ثم تحرك بالسرعة التى اكتسبها لمدة ٤٠ ثانية أخرى أوجد مقدار سرعته المتوسطة.

(١٠) يتحرك جسم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة على مستوى أفقى أملس فقطع ٢٦ مترًا خلال الثانية الرابعة من بدء الحركة ، ٥٦ مترًا خلال الثانية التاسعة، أوجد سرعته الابتدائية ومقدار عجلته.

(١١) س ، ص نقطتان على طريق مستقيم أفقى بدأت سيارة أ الحركة من س نحو ص من السكون وبعجلة منتظمة ١٠م / ث^{٢} وفي نفس اللحظة كانت تتحرك سيارة أخرى ب من ص نحو س بسرعة منتظمة مقدارها ٥٤ كم / س ، فإذا كانت السرعة النسبية للسيارة أ بالنسبة للسيارة ب لحظة التقائهما تساوى ١٦٢ كم / س. أوجد الزمن الذى تأخذه كل من السيارتين من لحظة تحركها معًا حتى لحظة التقائهما.

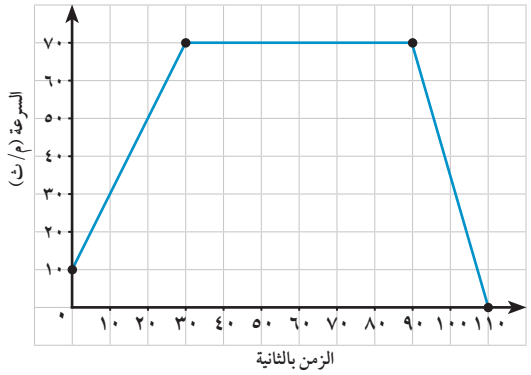
نشاط

(١٢) الشكل المقابل يمثل منحنى (السرعة - الزمن) لجسم بدأ التحرك بسرعة ابتدائية مقدارها ١٠م / ث وحتى سكن بعد زمن قدره ١١٠ ثانية. أوجد:

أ عجلة التسارع.

ب مقدار التقصير المنتظم للجسم حتى يسكن.

ج المسافة الكلية التى تحركها الجسم.



تفكير إبداعى:

(١٣) مصعد ساكن بقاع منجم ، أخذ المصعد فى الارتفاع بعجلة مقدارها ١٢٠سم/ث^{٢} مسافة ٥٤٠سم، ثم بسرعة منتظمة مسافة ٣٦٠ سم ثم بتقصير منتظم مسافة ٧٢٠سم حتى سكن عند فوهة المنجم. احسب الزمن الذى استغرقه المصعد فى الصعود من قاع المنجم إلى فوهته.

الدرس ٣

السقوط الحر

Free Fall

سوف تتعلم

- قوانين الحركة الرأسية.
- دراسة حركة الأجسام الساقطة أو المقذوفة لأسفل.
- دراسة حركة الأجسام المقذوفة لأعلى.

المصطلحات الأساسيّة

- سقوط حر Free fall
- عجلة الجاذبية الأرضية Acceleration of gravity

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية.

فكر و ناقش

ما الذى يحدث عندما تسقط برتقالة من شجرة؟

- تتحرك البرتقالة من سكون ، ثم تكتسب سرعة فى أثناء سقوطها سقوطًا حرًا نتيجة تأثير جاذبية الأرض عليها فبعد ١ ثانية ستكون سرعتها ٩,٨ م/ث لأسفل، وبعد ثانية أخرى ستصبح سرعتها ١٩,٦ م/ث لأسفل وهكذا...

لاحظ أن: مقدار الزيادة فى السرعة يتوقف على الارتفاع الذى سقطت منه البرتقالة ، فكلما زاد الارتفاع زادت سرعة البرتقالة.

إن التسارع الذى تسقط به الأجسام سقوطًا حرًا (مع إهمال مقاومة الهواء) يساوى ٩,٨ م/ث^{٢} تقريبًا ويختلف باختلاف خط العرض فيقل عند خط الاستواء ويزداد قليلًا كلما اتجهنا نحو القطبيتن.

قوانين الحركة الرأسية للأجسام:

تخضع الحركة الرأسية لنفس قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة مع استخدام الرمز (ى) الدالة على **التسارع الذى تسقط به الأجسام سقوطًا حرًا** بدلًا من الرمز (جـ) وبذلك تأخذ القوانين الصورة الآتية:

$$ع = ع_{.} + ى\,ن \quad ، \quad ف = ع_{.}\,ن + \frac{١}{٢}\,ى\,ن^{٢} \quad ، \quad ع^{٢} = ع_{.}^{٢} + ٢ى ف$$

ولذلك عند تطبيق القوانين بالصورة السابقة يجب مراعاة ع ، ع. ، ى ، ف تبعًا لما يأتى.

أولًا: إذا كان الجسم ساقطًا أو مقذوفًا نحو سطح الأرض

يعتبر الاتجاه الموجب هو الاتجاه الرأسى إلى أسفل فتكون كل من ع. ، ع ، ى ، ف موجبة.

مثال

(١) أسقط عامل بناء قطعة خرسانية من سقالة (منصة) عالية.

(أ) ما سرعة قطعة البناء بعد نصف ثانية.

(ب) ما المسافة التى تقطعها كتلة البناء خلال هذا الزمن.

الحل

أ **صيغة القانون:** ع = ع$_{ب}$ + ى ن

بالتعويض عن ع$_{ب}$ = ٠ ، ى = ٩,٨ م/ث^{٢} ، ن = $\frac{١}{٢}$ ثانية.

ع = ٠ + ٩,٨ × $\frac{١}{٢}$ = ٤,٩ م/ث

ب صيغة القانون: ف = ع$_{ب}$ ن + $\frac{١}{٢}$ ى ن^{٢}

بالتعويض عن ع$_{ب}$ = ٠ ، ى = ٩,٨ م/ث^{٢} ، ن = $\frac{١}{٢}$ ثانية.

ف = ٠ + $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ × $\frac{١}{٤}$ = ١$\frac{٩}{٤٠}$ متر.

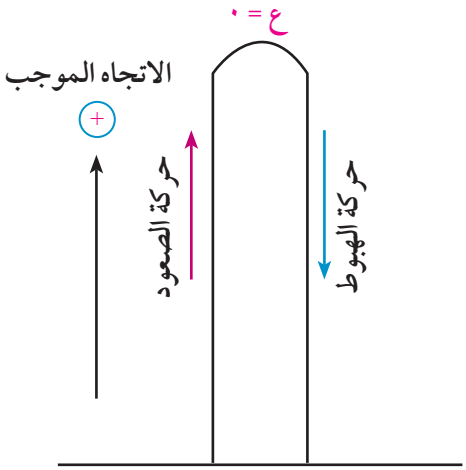
حاول أنْ تحل

(١) سقطت تفاحة من شجرة وبعد ثانية واحدة ارتطمت بالأرض.

أ احسب سرعة التفاحة لحظة ارتطامها بسطح الأرض ، ثم احسب السرعة المتوسطة لحظة ارتطامها بسطح الأرض.

ب ما هو بعد التفاحة عن سطح الأرض لحظة بداية سقوطها؟

ثانيًا: إذا كان الجسم مقذوفًا إلى أعلى



نشاط

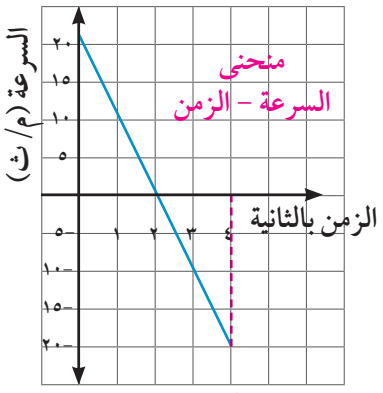
قذفت كرة رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها ١٩,٦ م/ث^{٢}، باعتبار أن الاتجاه الرأسى لأعلى هو الاتجاه الموجب فتكون السرعة الابتدائية موجبة تبعًا لذلك ، أما التسارع فيكون سالبًا - **لماذا؟**

- استخدم برنامج (geogebra) فى رسم العلاقة بين (السرعة-الزمن) حيث ع = ١٩,٦ – ٩,٨ن عندما ن ∈ [٠ ، ٤]

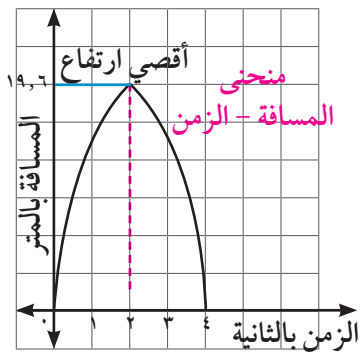
ماذا تلاحظ؟

- استخدم نفس البرنامج فى رسم العلاقة بين (**المسافة – الزمن**):

حيث ف = ١٩,٦ ن - ٤,٩ ن^{٢} ، **ماذا تلاحظ؟**



شكل (١)



شكل (٢)

نلاحظ من الشكل البيانى أن:

- سرعة الجسم فى أثناء الصعود تكون موجبة وفى أثناء الهبوط تكون سالبة.

فمثلًا: عندما ن ∈]٠ ، ٢[**نلاحظ أن سرعة** ع > ٠ ، **عندما** ن ∈]٢ ، ٤[**فان** ع < ٠

- سرعة الجسم عند أقصى ارتفاع تساوى صفرًا.
- زمن الصعود للجسم يساوى زمن الهبوط.
- مقدار سرعة الجسم التى يعود بها إلى نقطة القذف تساوى مقدار سرعة القذف بإشارة مخالفة.
- إزاحة الجسم خلال فترة زمنية ما ليست بالضرورة أن تكون مساوية للمسافة التى قطعها الجسم خلال هذه الفترة.

تفكير ناقد:

١ - إذا قذف جسم رأسيًّا لأعلى بسرعة ابتدائية (ع.) فبلغت سرعته النهائية (ع) فى زمن قدره (ن) **فأوجد.**

أ زمن وصول الجسم إلى أقصى ارتفاع.

ب مسافة أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم.

مثال

٢ قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ٤٩م/ث. أوجد زمن وصوله إلى أقصى ارتفاع والمسافة التى وصل إليها.

الحل

ع. = ٤٩م/ث ، ئ = -٩,٨ م/ث^{٢} ، ع = ٠ (عند أقصى ارتفاع)

أ **لإيجاد زمن أقصى ارتفاع:**

∵ ع = ع. + ئ ن ∴ ٠ = ٤٩ - ٩,٨ ن. ∴ ن = ٥ ثوان.

ب **لإيجاد مسافة أقصى ارتفاع:**

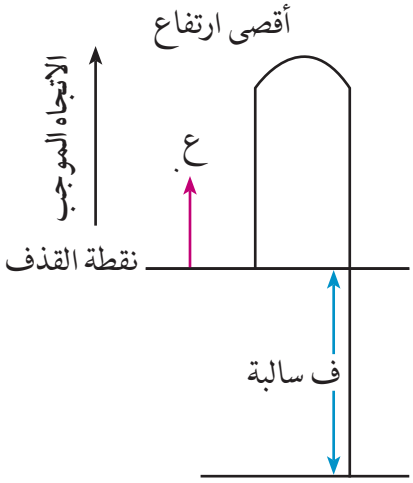
∵ ع^{٢} = ع.^{٢} + ٢ ئ ف. ∴ ٠ = (٤٩)^{٢} - ٢ × ٩,٨ × ف. ∴ ف = ١٢٢,٥ مترًا

فكر:

١ - هل يمكنك استخدام قوانين أخرى لإيجاد مسافة أقصى ارتفاع؟ **وضِّح ذلك.**

مثال

٣ قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ١٦م/ث. أوجد الزمن الذى يأخذه الجسم حتى يصل إلى ٣٣٠ مترًا أسفل نقطة القذف.



الحل

نعتبر الاتجاه الرأسى إلى أعلى هو الاتجاه الموجب

ع. = ١٦م/ث لأنها نفس اتجاه القذف.

ى = - ٩,٨ لأنها عكس اتجاه عملية الجاذبية الأرضية.

ف = - ٣٣٠ لأنها أسفل نقطة القذف.

ف = ع. ن + $\frac{١}{٢}$ ى ن^{٢}

- ٣٣٠ = ١٦ن - $\frac{١}{٢}$ × ٩,٨ن^{٢} بالتبسيط ٤٩ن^{٢} - ١٦ن - ٣٣٠ = ٠

بالتحليل المقدار الثلاثى: (ن - ١٠) (٤٩ن + ٣٣٠) = ٠

ن = ١٠ ، ن = - $\frac{٣٣٠}{٤٩}$ (مرفوض)

فكر:

١- هل توجد لديك حلول أخرى؟ وضِّح ذلك.

حاول أنْ تحل

(٢) قذفت كرة صغيرة رأسيًّا إلى أعلى من نافذة أحد المنازل وشوهدت الكرة وهى هابطة أمام النافذة بعد ٣ ثوان من قذفها ، ثم وصلت إلى سطح الأرض بعد ٤ ثوان من لحظة القذف. أوجد ارتفاع هذه النافذة عن سطح الأرض.

تمـــاريـن الدرس الثالث

(١) طفل يُسقط كرة من نافذة ترتفع ٣,٦م عن الرصيف. ما سرعتها لحظة ملامستها الرصيف؟

(٢) سقطت كرة رأسيًّا إلى أسفل. ما سرعتها بعد ٦ ثوان من لحظة سقوطها.

(٣) سقط جسم رأسيًّا لأسفل من ارتفاع ٤٩٠م عن سطح الأرض أوجد:

أ زمن الوصول إلى سطح الأرض.

ب سرعته بعد ٥ ثوان من بدء الحركة.

(٤) سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٠ أمتار فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسيًّا إلى أعلى مسافة ٢$\frac{١}{٢}$متر. احسب سرعة الكرة قبل وبعد اصطدامها بالأرض مباشرة.

(٥) يتدرب طالب على ركل كرة القدم رأسيًّا إلى أعلى فى الهواء، ثم تعود الكرة أثر كل ركلة فتصدم بقدمه. فإذا استغرقت الكرة من لحظة ركلها وحتى اصطدامها بقدمة ٠,٣ ثانية.

أ أوجد السرعة الابتدائية.

ب الارتفاع الذى وصلت إليه الكرة بعد أن ركلها الطالب.

(٦) قذف جسم من أعلى تل ارتفاعه ٩,٨ أمتار رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ٤,٩ م/ث أوجد:
(أ) سرعة الجسم عند لحظة وصولة إلى أسفل التل.
(ب) الزمن الذى استغرقة للوصول إلى أسفل التل.

(٧) قذُف حجر فى بئر بسرعة ٤ م/ث رأسيًّا لأسفل فوصل إلى قاع البئر بعد ٢ ثانية. أوجد:
(أ) عمق البئر.
(ب) سرعة الحجر عند تصادمه بقاع البئر.

(٨) قذف جسيم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ١٤ م/ث من نقطة على ارتفاع ٣٥٠م عن سطح الأرض. أوجد الزمن الذى يأخذه الجسم حتى يصل إلى سطح الأرض.

(٩) قذفت كرة رأسيًّا إلى أعلى من نافذة فوصلت إليها بعد ٤ ثوان من لحظة القذف ووصلت إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوان من لحظة القذف. أوجد
(أ) سرعة قذف الكرة.
(ب) أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة من نقطة القذف.
(ج) ارتفاع النافذة عن سطح الأرض.

(١٠) من قمة برج ارتفاعه ٨٠,٥ مترًا قذف جسم رأسيًّا لأعلى بسرعة ٨,٤ م/ث. أوجد :
(أ) أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم من نقطة القذف.
(ب) الزمن الذى يستغرقه الجسم وهو هابط حتى تصبح سرعته ١١,٢م/ث.
(ج) زمن وصول الجسم إلى نقطة القذف.
(د) زمن وصول الجسم إلى سطح الأرض.

(١١) قذفت كرة من أعلى تل ارتفاعه ١٤٠م رأسيًّا إلى أعلى ، فوجد أنها قطعت فى الثانية الثالثة مسافة ١٠,٥ أمتار. أوجد:
(أ) السرعة التى قذفت بها الكرة.
(ب) أقصى ارتفاع وصلت إليه الكرة.
(ج) الزمن الذى استغرقته الكرة فى الوصول إلى سطح الأرض.

تفكير ابداعى:

(١٢) سقط جسم من ارتفاع ٦٠ مترًا من سطح الأرض وفى نفس اللحظة قذف جسم أخر رأسيًّا لأعلى من سطح الأرض بسرعة ٢٠م / ث فتقابل الجسمان بعد فترة زمنية أوجد هذا الزمن، ثم أوجد المسافة التى قطعها كل من الجسمين خلال هذه الفترة الزمنية.

الدرس ٤

قانون الجذب العام

Universal gravitation law

سوف تتعلم

- قانون الجذب لنيوتن.
- تعريف ثابت الجذب العام.
- المقارنة بين عجلتى الجاذبية على سطحى كوكبين.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- جذب عام
- ثابت الجذب العام
- قوة الجذب.

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية

Scientific calculator

فكر وناقش:

ماذا يحدث لحركة القمر لو فَقدت الأرض قوة جاذبيتها للقمر؟ بالتأكيد سيسلك مسارًا آخر بدلًا من أن يكون مساره شبه دائرى حول الأرض.

لقد أدرك نيوتن أن القوى المسئولة عن جاذبية الأرض للقمر وجاذبية الشمس للكواكب إنما هى حالة خاصة من الجذب العام بين الأجسام.

وسوف تتعرف الآن على قانون الجذب العام لنيوتن الذى نشره فى بحثه الرياضى مبادئ الفلسفة الطبيعية حيث ذكر نيوتن أن:

كل الأجسام فى الكون تتجاذب مع الأجسام الأخرى بتأثير قوة مباشرة تتناسب طرديا مع كتلتها وعكسيا مع مربع المسافة بين مركزيهما.

فإذا كان لدينا كتلتين ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ وتفصل بينهما مسافة ف فإن مقدار قوة الجاذبية بينهما

تعطى بالعلاقة: $\text{و} = \text{ث} \times \frac{\text{ك}_{١}\,\text{ك}_{٢}}{\text{ف}^{٢}}$ حيث

ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ مقاستان بالكيلوجرام ، ف مقاسة بالمتر ، ث هو ثابت الجذب العام.

تعريف ثابت الجذب العام: *gravitational constant*

هو قوة الجذب المتبادلة بين كتلتين مقدار كل منهما ١ كيلو جرام والمسافة بين مركزيهما ١ متر ويساوى تقريبًا ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$ نيوتن . متر^{٢} / كجم^{٢}.

تعبير شفهى:

١- اذكر العوامل التى تتوقف عليها قوة التجاذب بين جسمين.

فكر:

١- ماذا يحدث لقوة الجذب المتبادلة بين جسمين إذا ازدادت المسافة بينهما؟

٢- لماذا تظهر قوى التجاذب المادى بين الأجرام السماوية بوضوح؟

مثال

(١) كرتين كتلة الأولى ٥,٢ كجم وكتلة الثانية ٠,٢٥ كجم وضعت الكرتان، بحيث كانت المسافة بين مركزيهما ٥٠سم. احسب قوة التجاذب بينهما ، علما بأن ثابت الجذب العام يساوى ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}.

الحل

ك$_{١}$ = ٥,٢ كجم ، ك$_{٢}$ = ٠,٢٥ كجم ، ف = $\frac{١}{٢}$ م ، ث = ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$ نيوتن.م^{٢} / كجم^{٢}

∴ و = ث × $\frac{ك_{١} ك_{٢}}{ف^{٢}}$ ∴ و = $\frac{٠,٢٥ \times ٥,٢}{\frac{١}{٤}}$ × ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$

و = ٣,٤٦٨٤ × ١٠$^{-١٠}$ نيوتن (وهى قوة صغيرة جدًا)

حاول أنْ تحل

(١) إذا علمت أن كتلة الأرض ٦ × ١٠^{٢٤} كجم وكتلة القمر ٧ × ١٠^{٢٢} والمسافة بينهما ٣ × ١٠^{٦} متر وثابت الجذب العام ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}. أوجد قوة جذب الأرض للقمر.

مثال

(٢) قمر صناعى كتلته ك كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض التى كتلتها ٦ × ١٠^{٢٤} كجم ونصف قطرها ٦٣٦٠ كم أوجد ك لأقرب كجم علما بأن ثابت الجذب العام يساوى ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$ نيوتن.م^{٢} / كجم^{٢}، قوة جذب الأرض للقمر هى ١٧٣١٠ نيوتن.

الحل

ك$_{١}$ = ك ، ك$_{٢}$ = ٦ × ١٠^{٢٤} ، ف = (٦٣٦٠ + ٤٤٠) × ١٠٠٠ م وبالتعويض فى القانون: ق = ث × $\frac{ك_{١} ك_{٢}}{ف^{٢}}$

١٧٣١٠ = ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$ × $\frac{ك_{١} \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}{(١٠٠٠ \times ٦٨٠٠)^{٢}}$

أىْ أنَّ: ك = $\frac{١٧٣١٠ \times (١٠٠٠ \times ٦٨٠٠)^{٢}}{٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}$ ك = ٢٠٠٠,٠٣٥٩٨٢ ≃ ٢٠٠٠ كجم



17 310 × (68 00 × 10 00) χ^2 ÷ (6.67 × 10 $\chi^{\blacksquare}$

− 11 × 6 × 10 $\chi^{\blacksquare}$ 24 ►) =

حاول أنْ تحل

(٢) قمر صناعى كتلته ١٥٠٠ كجم يدور على ارتفاع ٥٤٠ كم من سطح الأرض التى كتلتها ٦ × ١٠^{٢٤} كجم ونصف قطرها ٦٣٦٠ كم.

أوجد قوة جذب الأرض للقمر بالنيوتن علمًا بأن ثابت الجذب العام يساوى ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}

مثال

حساب كتلة الأرض

(٣) احسب كتلة الأرض بوحدة كجم بفرض أن جسمًا كتلته ١ كجم وضع فوق سطحها. علماً بأن طول نصف قطر الأرض ٦٣٦٠ كم، ث = ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}

الحل

قوة جذب الأرض للجسم = ك د (حيث ك = ١ كجم ، د = ٩,٨ م / ث^{٢})

و = ١ × ٩,٨ = ٩,٨ نيوتن

نصف قطر الأرض = ٦٣٦٠ × ١٠٠٠ متر ، ث = ٦,٦٧ × ١٠ $^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}

بتطبيق قانون الجذب العام: و = ث × $\frac{ك_{١} ك_{٢}}{ف^{٢}}$

$$٩,٨ = ٦,٦٧ \times ١٠^{-١١} \times \frac{١ \times ك \text{ للأرض}}{(١٠٠٠ \times ٦٣٦٠)^{٢}}$$

$$\text{كتلة الأرض (ك)} = \frac{٩,٨ \times (١٠٠٠ \times ٦٣٦٠)^{٢}}{٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}} \simeq ٦ \times ١٠^{٢٤} \text{ كجم}$$

أضف إلى معلوماتك

قوة جذب الأرض لجسم كتلته ك كجم = ك ى = ٩,٨ ك

تفكير ناقد: هل تتغير كتلة الأرض فى المثال السابق إذا كانت كتلة الجسم الموضوع فوق سطحها يساوى ١٠٠٠ كجم؟ فسِّر ذلك.

٩ حاول أنْ تحل

(٣) احسب نصف قطر الأرض بفرض أن جسمًا كتلته ١ كجم وضع فوق سطحها علمًا بأن كتلة الأرض تساوى ٦ × ١٠ ^{٢٤} كجم وثابت الجذب العام يساوى ٦,٦٧ × ١٠ $^{-١١}$ نيوتن . م^{٢} / كجم^{٢}

مثال

تعيين عجلة الجاذبية الأرضية (ى)

(٤) احسب عجلة الجاذبية الأرضية بوحدة م / ث^{٢} لجسم كتلة ١ كجم وضع فوق سطحها. علمًا بأن كتلة الأرض تساوى ٦ × ١٠ ^{٢٤} كجم، نصف قطر الأرض يساوى ٦٣٦٠ كم

الحل

∵ قوة جذب الأرض للجسم = ك ى ∴ و = ١ × ى أىْ أنَّ و = ى

∵ و = ث × $\frac{ك_{١} ك_{٢}}{ف^{٢}}$ ∴ ى = ٦,٦٧ × ١٠ $^{-١١}$ × $\frac{١ \times ٦ \times ١٠^{٢٤}}{(١٠٠٠ \times ٦٣٦٠)^{٢}}$ ى ≃ ٩,٨٩٣٧٩ م / ث^{٢}

المقارنة بين عجلتى الجاذبية على سطحى كوكبين:

مما سبق يمكن استنتاج العلاقة الآتية: $\frac{ى_{١}}{ى_{٢}} = \frac{ك_{١}}{ك_{٢}} \times \frac{ع_{٢}^{٢}}{ع_{١}^{٢}}$

حيث: ى$_{١}$ ، ى$_{٢}$ عجلتى الجاذبية لكل كوكب ، ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ كتلتيهما بالكجم ، ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ نصفى قطريهما بالمتر على الترتيب.

مثال

(٥) إذا كانت كتلة الأرض قدر كتلة القمر ٨١ مرة وقطراهما ١٢٧٥٦ كم ، ٣٤٧٦ كم على الترتيب فإذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية ٩,٨ م / ث^{٢} فكم يكون تسارع الجاذبية على سطح القمر؟

الحل

نفرض أن كتلة القمر ك كجم فتكون كتلة الأرض = ٨١ ك كجم

ع$_{١}$ = ٦٣٧٨ كم ، ع$_{٢}$ = ١٧٣٨ كم ، ى$_{١}$ = ٩,٨ م / ث^{٢} ، ى$_{٢}$ = ؟

∵ $\frac{ى_{١}}{ى_{٢}} = \frac{ك_{١}}{ك_{٢}} \times \frac{ع_{٢}^{٢}}{ع_{١}^{٢}}$ ∴ $\frac{٩,٨}{ى_{٢}} = \frac{٨١ ك}{ك} \times (\frac{١٧٣٨}{٦٣٧٨})^{٢}$

وبالتبسيط: ∴ ى للقمر ≃ ١,٦٣ م / ث^{٢}

٩ حاول أنْ تحل

٤ إذا علمت أن كتلة الأرض ٥,٩٧ × ١٠ ^٢٤ كجم ونصف قطرها ٦,٣٤ × ١٠ ^٦ م وكتلة القمر ٧,٣٦ × ١٠ ^٢٢ ونصف قطره ١,٧٤ × ١٠ ^٦ م فأوجد النسبة بين الجاذبية على سطح القمر إلى سطح الأرض.

تمـــاريـن الدرس الرابع

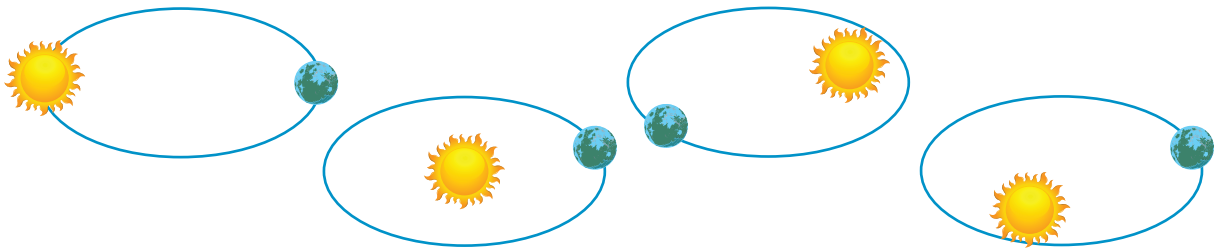
تنبيه: اعتبر ثابت الجذب العام لنيوتن: ث = ٦,٦٧ × ١٠ ^-١١ نيوتن.متر^٢ / كجم^٢

١ ماذا يحدث لوزنك كلما ابتعدت أكثر عن سطح الأرض؟

٢ لماذا لا تظهر قوة الجاذبية بين الأجسام التى نشاهدها يوميًّا؟

٣ ماذا يحدث لقوة الجذب العام عند مضاعفة المسافة بينهما؟

٤ أيٌّ من المدارات الموضحة بالشكل التالى يُعتبر مدارًا ممكنًا لكوكب ما:



٥ أختيار من متعدد: كوكب لديه قمران متساويا الكتلة، القمر الأول فى مدار دائرى نصف قطره ن، القمر الثانى فى مدار دائرى نصف قطره ٢ن. إن مقدار قوة الجاذبية التى يوثر بها الكوكب على القمر الثانى هى:

أ أكبر أربع مرات من القوة الموثرة على القمر الأول.

ب أكبر مرتين من القوة الموثرة على القمر الأول.

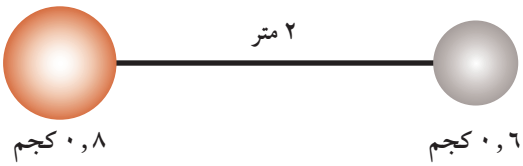
ج تساوى القوة المؤثرة على القمر الأول.

د نصف القوة المؤثرة على القمر الأول.

هـ ربع القوة المؤثرة على القمر الأول.

٦ فى الشكل المقابل:

إذا كان البعد بين مركزى كرتين ٢م وكانت كتلة إحداهما ٠,٨ كجم وكتلة الأخرى ٠,٦ كجم فما قوة التجاذب بينهما؟



٧ كرتان متماثلتان كتلة كل منهما ٦,٨ كجم والبعد بين مركزيهما ٢١,٨ سم ما قوة التجاذب بينهما؟

٨ احسب قوة التجاذب بين جسمين كتلتيهما ١٠ كجم ، ١٥ كجم والمسافة بينهما ٢ أمتار.

٩ قمر صناعى كتلته ٢٠٠٠ كجم يدور على ارتفاع ٤٤٠ كم من سطح الأرض التى كتلتها ٦ × ١٠ ^٢٤ كجم . أوجد قوة جذب الأرض للقمر علمًا بأن نصف قطر الأرض ٦٣٦٠ كم.

(١٠) إذا كانت عجلة الجاذبية الأرضية (ى) هى ١٠ م / ث^{٢} ونصف قطر الأرض يساوى ٦,٣٦ × ١٠^{٦} م . احسب كتلة الأرض.

(١١) احسب قوة التجاذب المتبادلة بين الشمس والأرض إذا علمت أن الأرض تسير فى مدار شبه دائرى حول الشمس وأن كتلة الأرض تساوى ٦ × ١٠^{٢٤} كجم وكتلة الشمس تساوى ٩ × ١٠^{٢٩} كجم والمسافة بينهما تساوى ١,٥ × ١٠^{١١} متر.

(١٢) إذا علمت أن كتلة الأرض تساوى ٥,٩٧ × ١٠^{٢٤} ونصف قطرها ٦,٣٤ × ١٠^{٦} م وكتلة القمر تساوى ٧,٣٦ × ١٠^{٢٢} كجم فأوجد طول نصف قطر القمر إذا كانت الجاذبية على سطح الأرض ستة أمثالها على سطح القمر.

(١٣) إذا علمت أن كتلة الأرض ٦,٠٦ × ١٠^{٢٤} ونصف قطرها ٦,٣٦ × ١٠^{٦} م فأوجد شدة مجال الجاذبية الأرضية .

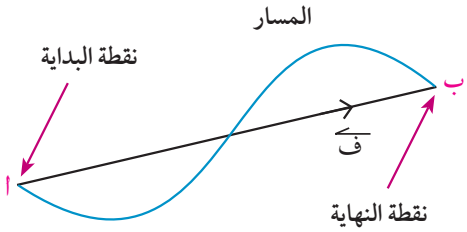
(١٤) كوكب كتلته مساوية ثلاث مرات كتلة الأرض وقطره يساوى ثلاث مرات قدر قطر الأرض احسب النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح هذا الكوكب وسطح الأرض.

(١٥) أوجد قوة الجذب العام بين كوكبين كتلة الأول ١٠^{٢١} × ٢ طن وكتلة الثاني = ١٠^{٢٥} × ٤ طن والمسافة بينهما ١٠^{٦} × ٢ كم.

(١٦) وضعت قطعة من الحديد على بعد ٥٠سم من أخرى من النيكل كتلتها ٢٥ كجم فكانت قوى التجاذب بينهما ١٠$^{-٨}$ × ٦ فكم تكون كتلة الكرة الحديد.

ملخص الوحدة

متجه الإزاحة



هو المتجه الذى تمثله القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ التى نقطة بدايتها (أ) ونقطة نهايتها (ب) ويرمز لمتجه الإزاحة $\overrightarrow{أب}$ بالرمز $\overrightarrow{ف}$ ، ويرمز لمعيار متجه الإزاحة بالرمز $||\overrightarrow{أب}||$

متجه الموضع

هو المتجه الذى تنطبق بدايته مع موضع المشاهد (و) ونقطة نهايته مع موضع الجسيم ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{ر}$

العلاقة بين متجه الموضع ومتجه الإزاحة:

$$\overrightarrow{ف} = \overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ر_{.}}$$

متجه السرعة

متجه سرعة جسيم هو المتجه الذى معياره يساوى قيمة السرعة وينطبق اتجاهه على اتجاه الحركة.

الحركة المنتظمة

هى الحالة التى يكون فيها كل من معيار واتجاه متجه السرعة ثابتًا، أىْ أنَّ: الجسيم يتحرك فى اتجاه ثابت، حيث يقطع مسافات متساوية خلال فترات زمنية متساوية.

وتكون العلاقة بين القياسيين الجبريين للمتجهين $\overrightarrow{ف}$ ، $\overrightarrow{ع}$ فى الحركة المنتظمة هى: $\boxed{ف = ع\ ن}$

متجه السرعة المتوسطة

إذا تحرك جسيم عند لحظتين زمنيتين $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ عند الموضعين أ ، ب على الترتيب وكان $\overrightarrow{ف}$ هو متجه الإزاحة فى الفترة الزمنية $(ن_{٢} - ن_{١})$ فإن $\overrightarrow{ع_{م}}$ يعرف بمتجه السرعة المتوسطة لهذا الجسيم خلال تلك الفترة الزمنية ويكون:

$$\frac{\overrightarrow{ف}}{ن_{٢} - ن_{١}} = \frac{\overrightarrow{ر} - \overrightarrow{ر_{.}}}{ن_{٢} - ن_{١}} = \overrightarrow{ع_{م}}$$

السرعة اللحظية:

إذا تحرك جسيم بسرعة متغيرة من خلال منحنى المسافة - الزمن فإن ميل المماس عند نقطة ما على المنحنى عند لحظة زمنية تعرف بالسرعة اللحظية.

السرعة النسبية:

السرعة النسبية لجسيم (أ) بالنسبة لجسيم آخر (ب) هى السرعة التى يبدو للجسيم (أ) أن يتحرك بها لو اعتبرنا الجسيم (ب) فى حالة سكون، باعتبار أن $\overrightarrow{ع_{أ}}$ ، $\overrightarrow{ع_{ب}}$ هما متجها سرعة لجسمين أ، ب وأن متجه سرعة ب بالنسبة أ هى $\overrightarrow{ع_{ب أ}}$ فإن $\boxed{\overrightarrow{ع_{ب أ}} = \overrightarrow{ع_{ب}} - \overrightarrow{ع_{أ}}}$

الحركة المستقيمة المتغيرة:

هى الحركة التى يحدث فيها تغيير فى قيمة السرعة بمرور الزمن يسمى بالتسارع (العجلة) ووحدة قياسه هى م / ث^{٢}.

التسارع (جـ) = $\frac{\text{السرعة النهائية - السرعة الابتدائية}}{\text{الزمن}}$

الحركة منتظمة التغير:

يقال إن الجسيم يتحرك حركة منتظمة التغير أو بتسارع (عجلة) منتظم إذا كان متجه العجلة ثابتًا مقدارًا واتجاهًا لجميع الأزمنة.

إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية (ع) وعجلة ثابتة (جـ) وأصبحت سرعته (ع) بعد فترة زمنية (ن) قطع خلالها مسافة (ف) فإن:

- العلاقة بين السرعة والزمن: ع = ع. + جـ ن
- العلاقة بين المسافة والزمن: ف = ع. ن + $\frac{1}{2}$جـ ن^{2}
- العلاقة بين السرعة والمسافة: ع^{2} = ع.^{2} + ٢جـ ف

ويلاحظ أن هذه العلاقات تربط بين أربعة مجاهيل يمكن إيجاد إحداهما بمعلومية الثلاثة الآخرين.

- المساحة تحت منحنى السرعة - الزمن تساوى إزاحة الجسم المتحرك.
- السرعة المتوسطة لجسيم خلال فترة زمنية ما تساوى سرعته اللحظية فى منتصف هذه الفترة.

قوانين الحركة الرأسية للأجسام:

تخضع قوانين الحركة الرأسية لنفس قوانين الحركة المستقيمة ذات العجلة المنتظمة مع استخدام الرمز (ى) الدالة على **التسارع الذى يسقط به الأجسام سقوطًا حرًا** بدلًا من الرمز (جـ) وبذلك تأخذ القوانين الصورة الآتية:

ع = ع. + ى ن ، ف = ع. ن + $\frac{1}{2}$ى ن^{2} ، ع^{2} = ع^{2} + ٢ى ف

إذا قذف رأسيًا إلى أعلى تحت تأثير الجاذبية الأرضية وعاد إلى نقطة القذف فإن:

- سرعة الجسم فى أثناء الصعود تكون موجبة وفى أثناء الهبوط تكون سالبة.
- سرعة الجسم عند أقصى ارتفاع تساوى صفرًا.
- زمن الصعود للجسم يساوى زمن الهبوط.
- مقدار سرعة الجسم التى يعود بها إلى نقطة القذف تساوى مقدار سرعة القذف بإشارة مخالفة.
- إزاحة الجسم خلال فترة زمنية ما ليست بالضرورة أن تكون مساوية للمسافة التى قطعها الجسم خلال هذه الفترة.

قانون الجذب العام لنيوتن

إذا كان المسافة (ف) بين كتلتين ك$_{١}$، ك$_{٢}$ فإن مقدار قوة الجذب بينهما (و) تعطى بالعلاقة : و = ث × $\frac{ك_{١} ك_{٢}}{ف^{٢}}$

حيث ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ مقاستان بالكيلو جرام ، ف بالمتر.

ثابت الجذب العام:

هو قوة الجذب المتبادلة بين كتلتين مقدار كل منها ١كجم والمسافة بين مركزيها ١ متر ويساوى تقريبًا ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$ نيوتن . متر^{٢}/ كجم^{٢}

تمارين عامة (الوحدة الثانية)

أكمل ما يأتي:

(١) إذا كان $\overrightarrow{ع_{أ}} = ٧ \overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ع_{ب}} = -٣ \overrightarrow{س}$ فإن $\overrightarrow{ع_{أب}}$ = ...

(٢) إذا كان $\overrightarrow{ع_{ﻫ}} = ٧٠ \overrightarrow{ى}$ ، $\overrightarrow{ع_{ﺟ}} = ٥٠ \overrightarrow{ى}$ فإن $\overrightarrow{ع_{ﻫﺟ}}$ = ...

(٣) إذا تحركت سيارتان أ ، ب بالسرعتين ٦٥ كم/س ، ٧٥ كم/س فإن

(أ) $ع_{أب}$ = ... إذا كانتا فى اتجاه واحد.

(ب) $ع_{أب}$ = ... إذا كانتا فى اتجاهين متضادين.

(٤) بدأت سيارة الحركة من سكون بعجلة منتظمة ٢٠سم/ث لمدة ١٠ ثوان.

(أ) السرعة النهائية للسيارة = ... م/ث.

(ب) المسافة المقطوعة خلال تلك الفترة = ... متر.

(٥) بدأ جسم حركته بسرعة ٧٢ كم/س بعجلة تقصيرية ٢م/ث^{٢}.

(أ) الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يقف = ... ثانية.

(ب) المسافة المقطوعة خلال تلك الفترة = ... متر.

(٦) استخدمت سيارة فراملها فتوقفت خلال ١٠ ثوان بعد أن قطعت ٢٥ مترًا.

(أ) عجلة الحركة فى أثناء استخدام الفرامل = ... م/ث^{٢}.

(ب) سرعة السيارة عند بدء استخدام الفرامل = ... م/ث.

(٧) سقط جسم من قمة برج رأسي فوصل إلى سطح الأرض بعد ٥ ثوان:

(أ) سرعة الجسم عند وصوله إلى سطح الأرض = ... م/ث.

(ب) ارتفاع البرج = ... متر.

(٨) قذف جسم رأسيًّا لأعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إليها بعد ٤ ثوان:

(أ) سرعة قذف الجسم = ... م/ث.

(ب) أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم = ... متر.

(٩) من قمة برج ارتفاعه ٢٠ متر قذف جسم لأعلى بسرعة ٧م/ث:

(أ) سرعة الوصول إلى سطح الأرض = ... م/ث.

(ب) زمن الوصول إلى سطح الأرض = ... ثانية.

(١٠) كوكب كتلته مساوية ثلاث مرات كتلة الأرض وقطره يساوي ثلاث مرات قدر قطر الأرض، فإن النسبة بين عجلة الجاذبية على سطح الكوكب إلى سطح الأرض كنسبة :

(١١) يتحرك جسم فى خط مستقيم مسافة ١٠٠م بسرعة ٥م/ث ثم تحرك بسرعة ٨م/ث فى نفس الاتجاه لمدة ١٠ثوان أوجد السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.

(١٢) يتحرك جسمان أ ، ب فى خط مستقيم فى الاتجاه $\overleftarrow{ب\,أ}$ بالسرعتين ١٠٠٠ م/د، ١٢٠ كم/س فإذا كانت المسافة بينهما ٣٠ كم. أوجد متى وأين يلتقيان.

(١٣) قامت سيارة (أ) تتحرك على طريق مستقيم بقياس السرعة النسبية لسيارة (ب) قادمة فى الاتجاه المضاد فوجدتها ١٣٠ كم/س، ولما ضاعفت السيارة (أ) سرعتها وأعادت القياس وجدت أن سرعة (ب) أصبحت ١٨٠ كم/س أوجد السرعة الفعلية لكل من السيارتين.

(١٤) سيارة لمراقبة السرعة على الطرق السريعة تسير بسرعة ٣٠ كم/س راقبت حركة شاحنة نقل قادمة فى الاتجاه المضاد فبدت وكأنها تتحرك بسرعة ١١٠ كم/س أوجد السرعة الفعلية للشاحنة.

(١٥) تحرك جسم فى خط مستقيم بسرعة ٧م/ث وبعجلة منتظمة ٤م/ث. أوجد سرعته والمسافة التي يقطعها خلال ٦ ثوان.

(١٦) بدأ جسم حركته من سكون فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٢٠ كم/ث^{٢} وعندما أصبحت سرعته ٨م/ث تحرك بتقصير منتظم حتى سكن بعد ١١٢ ثانية من بداية الحركة احسب العجلة التقصيرية والمسافة الكلية.

(١٧) تحرك جسم من سكون فقطع ١٥٠م وعندما أصبحت سرعته ٥٤ كم/س انقطعت العجلة وسار بالسرعة التي اكتسبها مسافة ٣٠٠ متر، ثم تحرك بعد ذلك بتقصير منتظمة قدره $\frac{٣}{٢}$ م/ث^{٢} حتى سكن. احسب السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.

(١٨) يتحرك جسم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع ٥٢ مترًا فى الثوان الأربع الأولى ثم قطع مسافة ٩٢ مترًا فى الثوان الأربع التالية لها. احسب عجلة الحركة والسرعة الابتدائية والمسافة المقطوعة خلال ١٠ ثوان الأولى من حركته.

(١٩) إذا كان $\overrightarrow{ر}$ متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة و يتحدد بالعلاقة $\overrightarrow{ر} = (٣ن^{٢} - ٣)\,\overrightarrow{ى}$ فأوجد متجه الإزاحة بعد ٤ ثوان من بدء الحركة.

(٢٠) سقط جسم من ارتفاع ف عند سطح الأرض فقطع فى الثانية الأخيرة من حركته ٣٤,٣ مترًا. أوجد:
أ سرعة وصول الجسم إلى سطح الأرض.
ب الارتفاع الذي سقط منه الجسم.

(٢١) قذف جسم رأسيًّا إلى أعلى بسرعة ١٤م/ث من نقطة على ارتفاع ٣٥٠ مترًا من سطح الأرض. أوجد:
أ الزمن الذي يأخذه الجسم حتى يصل إلى سطح الأرض.
ب المسافة الكلية التي قطعها الجسم حتى وصوله لسطح الأرض.

(٢٢) وضعت قطعة من الحديد على بعد ٤٠سم أخرى من النيكل كتلتها ٥٠ كجم فكانت قوة التجاذب بينهما ١٢×١٠^{-٨} نيوتن فكم تكون كتلة كرة الحديد إذا علمت أن ثابت الجذب العام يساوي $٦,٦٧ \times ١٠^{-١١}$ نيوتن . م^{٢}/ كجم^{٢}

اختبار تراكمي

(١) قوتان مقدارايهما ٨,١٦ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية أوجد:

(أ) مقدار أكبر محصلة لهما.

(ب) مقدار أصغر محصلة لهما.

(ج) مقدار واتجاه محصلتهما عندما يكون قياس الزاوية بينهما ١٢٠°.

(٢) القوى ١٢ ، ٥√٢ ، ٢√٢ ، ٨ ث جم تؤثر فى نقطة مادية نحو الشرق ، الشمال الغربي والجنوبي الغربي والجنوب على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٣) جسم وزنه ٢٨ ث كجم معلق بواسطة خيطين مثبت طرفاهما الآخرين، فإذا كان الخيطان متعامدين وقياس الزاوية بين إحداهما وخط عمل وزن الجسم ١٢٠°. احسب الشد فى كل من الخيطين.

(٤) جسم وزنه ٩٠ث كجم موضوع على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٣٠°. حفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة ق تؤثر على الجسم إلى أعلى فى اتجاه يميل على المستوى بزاوية قياسها ٣٠°. أوجد مقدار ق ورد فعل المستوى.

(٥) قضيب منتظم وزنه ٨٠٠ث يتصل طرفه (أ) بمفصل مثبت فى حائط رأسي وأثرت على طرفه الآخر (ب) قوة أفقية مقدارها ٤٠٠ ث جم لتجعله فى حالة توازن. أوجد قياس زاوية ميل القضيب على الحائط ومقدار رد فعل المفصل.

(٦) تتحرك سيارة شرطة (أ) على طريق مستقيم بسرعة ٢٥ كم/س. شاهدت سيارة أخرى (ب) تتحرك على نفس الطريق بسرعة ٧٥ كم/س. أوجد سرعة السيارة (ب) بالنسبة للسيارة (أ) عندما:

(أ) السيارتان تتحركان فى نفس الاتجاه.

(ب) السيارة (ب) تتحرك فى اتجاه مضاد للسيارة (أ).

(٧) يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة مقدارها ٥ كم/ث^{٢} وفي نفس اتجاه السرعة الابتدائية لهذا الجسيم وقدرها ٤٠سم/ث. أوجد:

(أ) مقدار كل من سرعة الجسم و إزاحته فى نهاية ٢٤ ثانية من بدء الحركة.

(ب) مقدار كل من سرعة الجسم بعد أن قطع مسافة ٥٦ مترًا من البداية.

(٨) تتحرك سيارة فى طريق مستقيم بتقصير منتظم مقداره ١٤ سم/ث^{٢} ، فتوقفت عن الحركة بعد مرور ٢٠ ثانية من لحظة البداية. أوجد:

(أ) مقدار سرعتها الابتدائية.

(ب) المسافة التي قطعتها خلال نصف دقيقة.

(ج) المسافة التي قطعتها حتى سكنت.

(٩) سقط جسم رأسيًّا إلى أسفل من ارتفاع ما نحو أرض رخوة فغاص فيها مسافة ١٤سم قبل أن يسكن فإذا كان الجسم يتحرك داخل الأرض بتقصير منتظم مقداره ٦٣م/ث^{٢} فما هو الارتفاع الذي سقط منه الجسيم.

(١٠) قذف جسيم من قمة برج رأسيًّا إلى أعلى بسرعة مقدارها ٢٤,٥ م/ث فوصل إلى سطح الأرض بعد ٨ ثواني. أوجد:

أ ارتفاع البرج.

ب أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم عن سطح الأرض.

ج المسافة التي يقطعها الجسم خلال هذه المدة.



الوحدة الثالثة

الهندسة و القياس

Geometry and Measurement

مقدمة الوحدة

نشأت الهندسة فى بدايتها مرتبطة بالناحية العملية فاستخدمها قدماء المصريين فى تحديد مساحات الأراضى وبناء الأهرامات والمعابد فأوجدوا مساحات بعض الأشكال وحجوم بعض المجسمات. وعندما زار طاليس (٦٤٠ - ٥٤٦ ق.م) الإسكندرية راقت له طرق المصريين فى قياس الأرض وأطلق عليها كلمة Geo-metron المأخوذة عن اللغة اليونانية والمكونة من كلمتى Geo وتعنى الأرض، metron وتعنى قياس واهتم بدراسة الهندسة على أنها تعبيرات صريحة مجردة خاضعة للبرهان.

تطورت الهندسة على يد الإغريق (طاليس - فيثاغورث- إقليدس) بظهور سلسلة من النظريات المبنية على بضع مسلمات وتعاريف مرتبة فى نظام منطقى دقيق ضمنه إقليدس فى كتابه الأصول المكون من ١٣ جزءًا، واستمرت الاسكندرية منارة المعرفة إلى أن جاء العرب وحفظوا ذلك التراث بترجمته إلى اللغة العربية وأضافوا إليه إضافات كثيرة ونقلوه إلى أوربا فى القرن الثانى عشر.

فى القرن السادس عشر بدأ عصر النهضة فى الرياضيات وميلاد علوم جديدة فقدم ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠) أسس الهندسة التحليلية وقام بتمثيل المعادلات بأشكال بيانية وهندسية والتعبير عن الأشكال بمعادلات واستخلص معادلة الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} = نق^{٢}$ كما توصل أويلر Euler إلى وجود علاقة بين عدد الأوجه وعدد الرؤوس وعدد الأحرف لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعة وهى:

عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢.

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يتعرف بعض المجسمات (الهرم – الهرم المنتظم – الهرم القائم – المخروط – المخروط القائم) ، وخواص كل منها.
- يستنتج المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل من الهرم القائم – المخروط القائم.
- يستنتج حجم كل من الهرم القائم – المخروط القائم .
- يوجد معادلة الدائرة بدلالة إحداثيات كل من مركزها، وطول نصف قطرها.
- يستنتج الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- يعين إحداثيات كل من مركز الدائرة، وطول نصف قطرها بمعلومية الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- يطبق ما درسه بالهندسة والقياس فى نمذجة مواقف رياضية وحياتية.



المصطلحات الأساسية

رأس	Vertex	مخروط	Cone	مخروط دائرى قائم	Right circular cone		
قاعدة	Base	وجه جانبى	Lateral face	مساحة جانبية	Lateral area		
محور	Axis	حرف جانبى	Lateral edge	مساحة كلية (سطحية)	Surface area		
دائرة	Circle	ارتفاع	Hight				
مركز	Center	ارتفاع جانبى	Slant hight				
نصف قطر	Radius	هرم منتظم	Regular pyramid				
قطر	Diameter	هرم قائم	Right pyramid				
هرم	Pyramid	شبكة هرم	Net of a pyramid				

الأدوات والوسائل

- الة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

دروس الوحدة

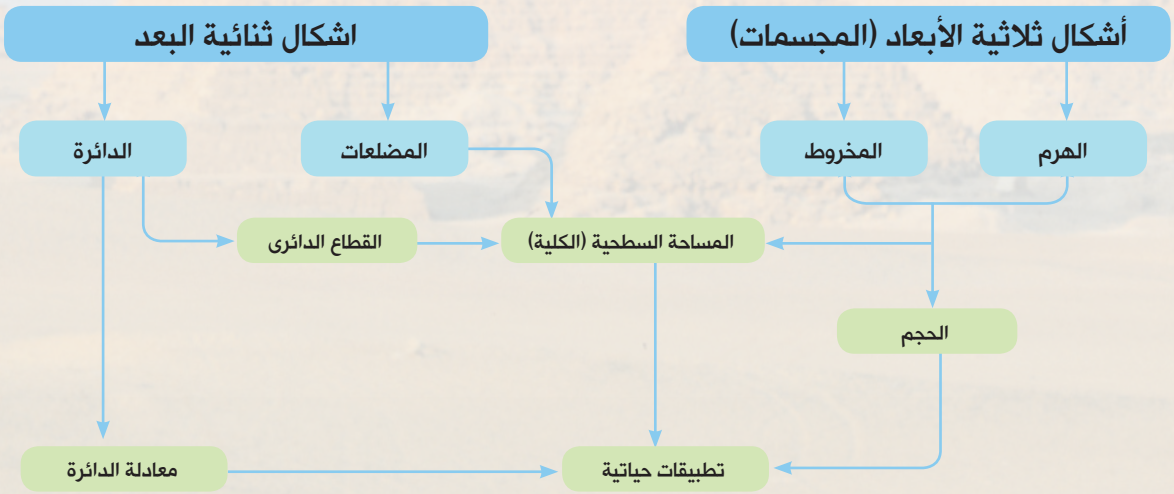
الدرس (٣ - ١): الهرم والمخروط.

الدرس (٣ - ٢): المساحة الجانبية والمساحة الكلية للهرم والمخروط.

الدرس (٣ - ٣): حجم الهرم والمخروط

الدرس (٣ - ٤): معادلة الدائرة.

مخطط تنظيمى للوحدة



الدرس ١

الهرم والمخروط
Pyramid and Cone

سوف تتعلم

- خواص بعض المجسمات الهرم- الهرم المنتظم - الهرم القائم - المخروط - المخروط القائم.
- مفهوم شبكة المجسم واستنتاج خواص المجسم من شبكته - رسم شبكة مجسم.
- نمذجة و حل مشكلات رياضية و حياتية باستخدام خواص الهرم و المخروط القائم.

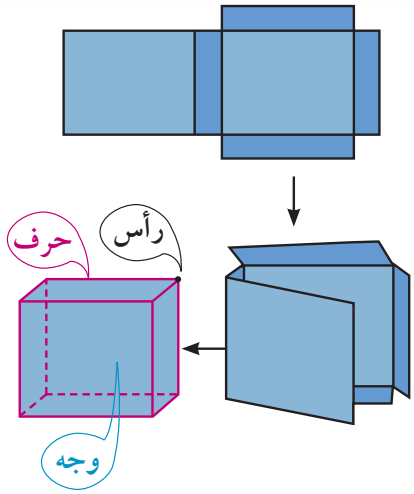
المصطلحات الأساسيّة

Pyramid	هرم
Cone	مخروط
Lateral face	وجه جانبى
Lateral edge	حرف جانبى
Height	ارتفاع
Slant hieght	ارتفاع جانبى
Regular pyramid	هرم منتظم
Right pyramid	هرم قائم
Net	شبكة
Right circular cone	مخروط دائرى قائم

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

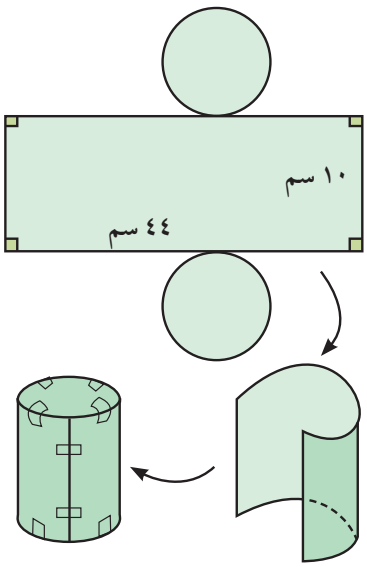
تصنع العديد من العبوات بطى ورق الكرتون المسطح إلى أشكال ثلاثية البعد لتعبئة منتجات المصانع قبل تسويقها فتشغل حيزًا من الفراغ ، مثل المكعب ، متوازى المستطيلات...



- كم وجهًا للمكعب؟ وكم رأسًا له؟
- كم حرفًا لمتوازى المستطيلات؟
- هل جميع أوجه المكعب متطابقة؟ فسر إجابتك.

نسمى الشكل الذى يمكن طيه لتكوين مجسمًا بشبكة المجسم ومنها نستنتج خواص المجسم.

يبين الشكل المقابل شبكة اسطوانة دائرية قائمة ، لاحظ:



١ - **قاعدتا الاسطوانة** متطابقتين وكل منهما على شكل دائرة.

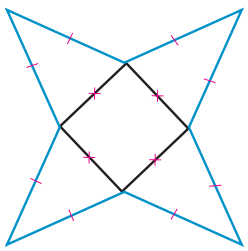
٢ - **السطح الجانبى للأسطوانة** قبل طيه هو مستطيل بعداه ٤٤سم ، ١٠سم فيكون إرتفاع الاسطوانة ١٠سم.

ما طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة؟

فكر:

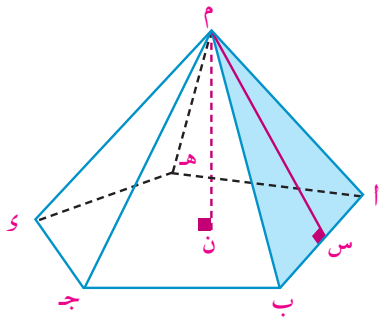
هل يمكنك معرفة اسم المجسم الذى يمكن تكوينه من طى الشبكة المقابلة؟ استنتج بعض خواصه.

هل يمكن رسم اكثر من شبكة للمجسم الواحد؟ فسر إجابتك.



الهرم Pyramid

هو مجسم له قاعدة واحدة وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة ويسمى هرمًا ثلاثيًا أو رباعيًا أو خماسيًا... حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته.



لاحظ: فى الشكل المقابل م ا ب جـ ء هـ هرم خماسى ، رأسه م وقاعدته المضلع ا ب جـ ء هـ ، **أوجهه الجانبية** Lateral faces سطوح المثلثات م ا ب، م ب جـ ، م جـ ء ، م ء هـ ، م هـ ا ، **وأحرفه الجانبية** Lateral edges $\overline{م ا}$ ، $\overline{م ب}$ ، $\overline{م جـ}$ ، $\overline{م ء}$ ، $\overline{م هـ}$.

ارتفاع الهرم height (م ن) هو بعد رأس الهرم عن مستوى قاعدته.

الارتفاع الجانبى Slant height (م س) هو بعد رأس الهرم عن أحد أضلاع قاعدته .

تعريف

الهرم المنتظم *Regular pyramid*

هو الهرم الذى قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها.

خواص الهرم المنتظم

١ - أحرفه الجانبية متساوية الطول.

٢ - أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة

٣ - الارتفاعات الجانبية متساوية.

تذكر أن

المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متساوية الطول وزواياه متساوية القياس مركزه هو مركز الدائرة المرسومة داخله أو خارجه.

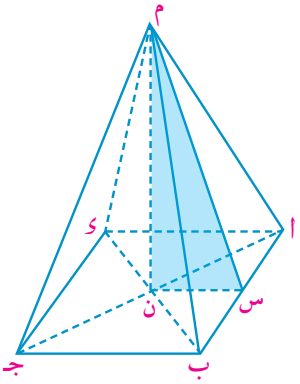
ملاحظة هامة:

المستقيم العمودى من رأس الهرم على مستوى قاعدته يكون عموديًا على أى مستقيم فيها

ففى الشكل المقابل إذا كان $\overline{م ن}$ عمودى على مستوى القاعدة فإن:

$\overline{م ن} \perp \overline{ا جـ}$ ، $\overline{م ن} \perp \overline{ب ء}$ ، $\overline{م ن} \perp \overline{ن س}$

ويكون المثلث م س ن قائم الزاوية فى ن.



مثال

(١) م ا ب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ا ب جـ ء يساوى ١٠سم وإرتفاعه ١٢سم ، أوجد ارتفاعه الجانبى وارسم إحدى شبكاته.

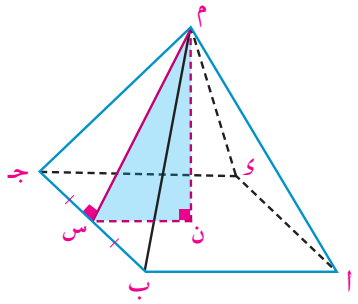
الحل

∵ الهرم رباعى منتظم ∴ $\overline{م ن} \perp$ المستوى ا ب جـ ء

حيث ن نقطة تقاطع قطرى المربع ا ب جـ ء ، م ن = ١٢سم

بفرض س منتصف $\overline{ب جـ}$ ∴ $\overline{م س} \perp \overline{ب جـ}$ (لماذا؟)

ويكون م س ارتفاع جانبى للهرم المنتظم.



فى △ ء ب جـ : ن منتصف $\overline{ء ب}$ ، س منتصف $\overline{ب جـ}$

∴ ن س = $\frac{1}{2}$ ء جـ = $\frac{1}{2}$ × ١٠ = ٥سم

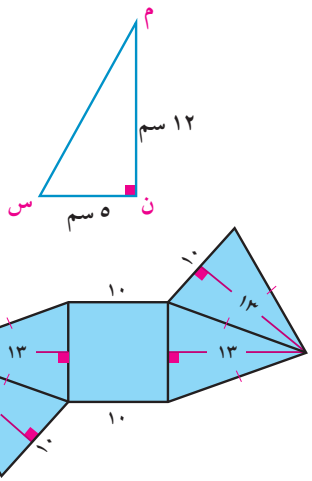
∵ $\overline{م ن}$ ⊥ المستوى أب جـ ء

∴ △ م ن س قائم الزاوية فى ن

ويكون: (م س)^{2} = (م ن)^{2} + (ن س)^{2} = (١٢)^{2} + (٥)^{2} = ١٦٩

∴ الارتفاع الجانبى للهرم = ١٣سم

ويوضح الشكل المقابل إحدى شبكات الهرم م أ ب جـ ء



حاول أن تحل

(١) م أ ب جـ ء هرم رباعى منتظم إرتفاعه ٢٠سم، وارتفاعه الجانبى ٢٥سم. أوجد طول ضلع قاعدة الهرم، وارسم شكلاً يوضح إحدى شبكاته.

الهرم القائم *Right pyramid*

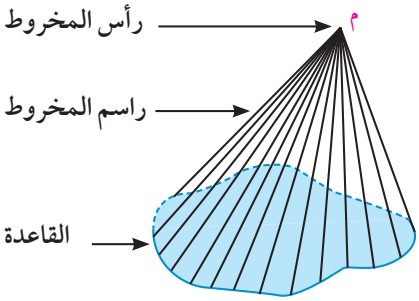
يكون الهرم قائمًا إذا وفقط إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسى.

فكر:

١ - هل الهرم المنتظم هو هرم قائم؟ فسر إجابتك.

٢ - إذا تزايد عدد أضلاع مضلع قاعدة هرم منتظم واقترب إلى عدد غير منته فما توقعك لشكل قاعدته؟ ناقش وضع أوجهه الجانبية عندئذ.

المخروط *Cone*



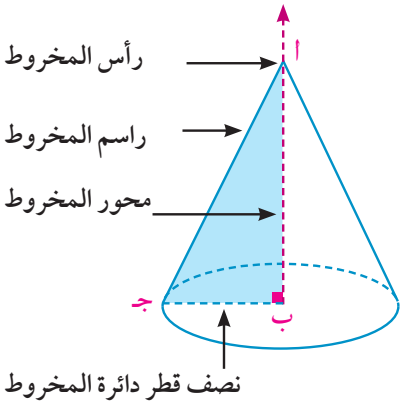
هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة ، ويتكون سطحه الجانبى من جميع نقط القطع المستقيمة المرسومة من رأسه إلى منحنى قاعدته والتى يعرف كل منها براسم المخروط.

المخروط الدائرى القائم *Right circular cone*

هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعى القائمة كمحور.

خواص المخروط الدائرى القائم.

يوضح الشكل المقابل مخروط دائرى قائم ناشئ من دوران المثلث القائم الزاوية فى ب دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{أ ب}$ كمحور فنجد:



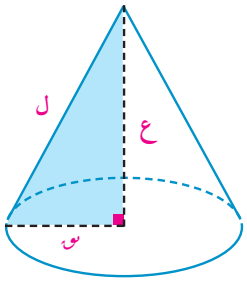
١ - $\overline{أ جـ}$ راسم المخروط ، أ رأس المخروط ، النقطة جـ ترسم أثناء الدوران دائرة مركزها نقطة ب وطول نصف قطرها يساوى طول $\overline{ب جـ}$ وسطح الدائرة هو قاعدة المخروط.

٢ - $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور المخروط عمودى على مستوى القاعدة ، ارتفاع المخروط يساوى طول $\overline{أ ب}$.

مثال

(٢) مخروط دائرى قائم طول راسمه ١٧سم، وارتفاعه ١٥سم، أوجد طول نصف قطر دائرته.

الحل



باعتبار طول الراسم = ل ، ارتفاع المخروط = ع ،
طول نصف قطر دائرة المخروط = ر

∴ ر^{٢} = ل^{٢} - ع^{٢}

∴ ر^{٢} = (١٧)^{٢} - (١٥)^{٢} = ٦٤

∴ ر = ٨ سم

حاول أن تحل

(٢) أوجد بدلالة π محيط ومساحة قاعدة مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢٤ سم وطول راسمه ٢٦سم.

فكر: أ ب جـ مثلث ، أ ب = أ جـ ، ء منتصف $\overline{ب جـ}$. إذا دار المثلث أ ب جـ نصف دورة كاملة حول $\overleftrightarrow{أ ء}$ كمحور.
هل ينشأ مخروط دائرى قائم؟ فسر إجابتك.

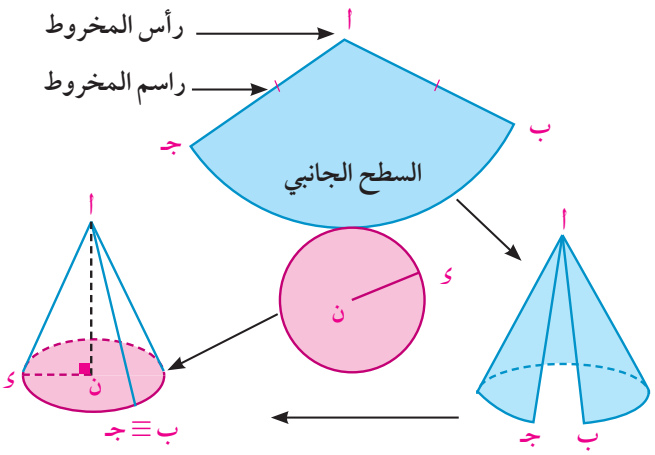
شبكة المخروط القائم:

يمكن طى شبكة المخروط القائم لتكوين عبوات مخروطية الشكل كما فى الشكل المقابل حيث:

١ - أ ب = أ جـ = ل (طول راسم المخروط)

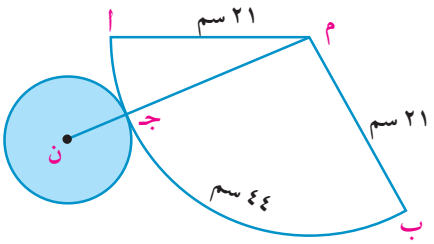
٢ - القطاع أ ب جـ يمثل السطح الجانبى للمخروط ، طول $\overset{\frown}{ب جـ}$ = ٢ π ر
(ر طول نصف قطر قاعدة المخروط)

٣ - ارتفاع المخروط = طول $\overline{أ ن}$



مثال

(٣) يوضح الشكل المقابل شبكة مخروط قائم، مستعينًا بالبيانات المعطاه، أوجد إرتفاعه.



الحل

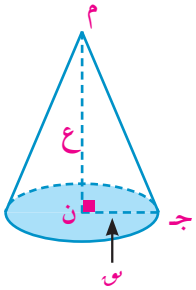
من شبكة المخروط نلاحظ أن:

طول راسم المخروط = طول $\overline{م أ}$ = ٢١سم

محيط قاعدة المخروط = طول $\overset{\frown}{أ ب}$ = ٤٤سم.

طول نصف قطر قاعدة المخروط = طول $\overline{جـ ن}$ = ر

عند طى شبكة المخروط نحصل على الشكل المقابل فيكون:



ارتفاع المخروط = طول $\overline{م ن}$ = ع

∵ 2π ق = ٤٤ ∴ $2 \times \frac{22}{7} \times$ ق = ٤٤ أى أن ق = ٧ سم

∵ $ع^2 = ل^2 - ق^2$

∴ $ع^2 = (21)^2 - (7)^2 = 28 \times 14$ أى أن ع = $14\sqrt{2}$ سم

∴ ارتفاع المخروط الدائرى القائم = $14\sqrt{2}$ سم.

حاول أن تحل

(٣) فى الشبكة السابقة للمخروط القائم، إذا كان م أ = ٤١سم ، طول $\overset{\frown}{أب}$ = 18π سم أوجد ارتفاع المخروط.

تفكير ناقد: هل العبارة التالية صحيحة: "ارتفاع المخروط القائم < طول راسمه"؟ فسر إجابتك.

تمـاريـن الدرس الأول

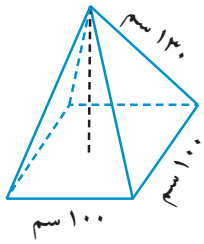
(١) فى الهرم الخماسى المنتظم:

أ ما عدد أوجهه الجانبية
ب ما عدد الأوجه
ج ما عدد أحرف الجانبية
د ما عدد أحرفه

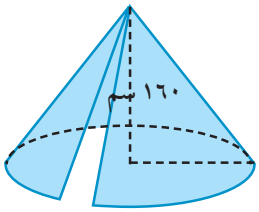
هـ للهرم رأس واحدة خلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسى؟ هل تحقق إجابتك علاقة أويلر لأى مجسم قاعدته منطقة مضلعه. **"عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + ٢"**

(٢) فى الهرم المنتظم ، رتب الأطوال التالية من الأصغر إلى الأكبر

أ طول الحرف الجانبى
ب ارتفاع الهرم
ج الارتفاع الجانبى



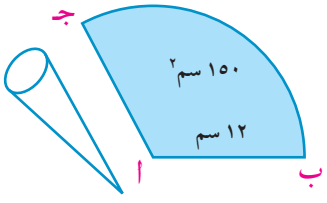
(٣) **هندسة مدنية:** يوضح الشكل المقابل خزان مياه على شكل هرم رباعى منتظم مستعينًا بالبيانات المعطاه أوجد كل من ارتفاع الوجه الجانبى وارتفاع الخزان ثم ارسم شبكته.



(٤) **الربط بالجوالة:** خيمة على شكل مخروط دائرى قائم ارتفاعها ١٦٠سم ومحيط قاعدتها ٧٥٣,٦سم احسب طول راسم مخروط الخيمة.

(٥) **الربط بالسياحة:** هرم الجيزة الأكبر (هرم خوفو) طول ضلع قاعدته ٢٣٢ مترًا وارتفاعه الجانبى ١٨٦ مترًا، أوجد أرتفاع الهرم.

(٦) **الربط بالصناعة:** تغلف الألبان المثلجة فى مخروط دائرى قائم بطى قطعة من الورق العازل للحرارة على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ١٢سم ومساحته ١٥٠سم^2 بحيث يتلامس نصفا قطرى دائرته $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$. أوجد ارتفاع المخروط. [تذكر: مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ طول قوسه × طول نصف قطر دائرته].



الدرس ٢

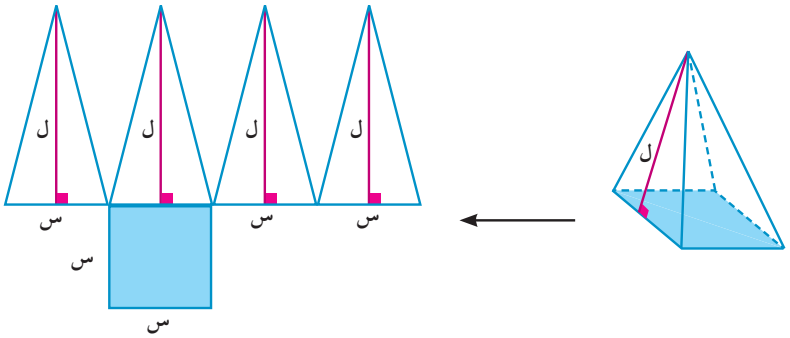
المساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط

Surface area of pyramids and cones

سبق أن تعلمت خواص الهرم والمخروط الدائرى القائم وقمت باستنتاج بعضها من خلال شبكة كل منهما. هل يمكنك حساب المساحة الجانبية والمساحة الكلية (السطحية) لكل من الهرم المنتظم والمخروط الدائرى القائم من شبكتيهما؟ فسر إجابتك.

المساحة الكلية للهرم المنتظم

يوضح الشكل التالى هرمًا رباعيًا منتظمًا و إحدى شبكاته.



لاحظ أن: الأوجه الجانبية مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة

الارتفاعات الجانبية متساوية وكل منها = ل

قاعدة الهرم مضلع منتظم طول ضلعه = س ويكون:

المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات أوجهه الجانبية

$= \frac{1}{2}$ س × ل + $\frac{1}{2}$ س × ل + $\frac{1}{2}$ س × ل + $\frac{1}{2}$ س × ل

$= \frac{1}{2}$ (س + س + س + س) ل

$= \frac{1}{2}$ محيط قاعدة الهرم × الارتفاع الجانبى.

المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية له + مساحة قاعدته.

تعلم

المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته × ارتفاعه الجانبى.

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

سوف تتعلم

- إيجاد المساحة الجانبية والمساحة الكلية (السطحية) لكل من الهرم المنتظم والمخروط القائم.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية تتضمن المساحة السطحية لكل من الهرم والمخروط القائم.

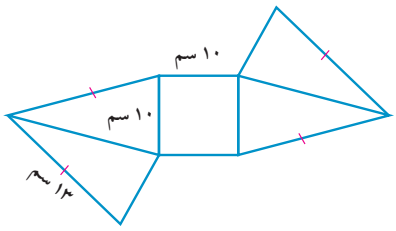
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- المساحة الجانبية
Lateral area (L.A)
- المساحة الكلية
Surface area (S.A)

الأدوات والوسائل

- آله حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب

مثال



(١) باستخدام الشبكة التى أمامك. صف المجسم وأوجد مساحته الكلية.

الحل

الشبكة لهرم رباعى منتظم.

قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها ١٠سم ، طول حرفه الجانبى = ١٣سم.

∵ الوجه الجانبى م أ ب متساوى الساقين ، م هـ ارتفاع جانبى.

∴ هـ منتصف أ ب أى أن أ هـ = ٥سم

فى Δ م هـ أ القائم الزاوية فى هـ نجد أن (م هـ)^{٢} = (أم)^{٢} - (أهـ)^{٢}

(م هـ)^{٢} = (١٣)^{٢} - (٥)^{٢} = ١٤٤

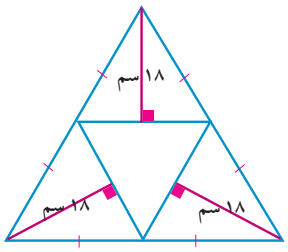
∴ م هـ = ١٢سم

∵ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبى

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ × (١٠ × ٤) × ١٢ = ٢٤٠ سم^{٢}

∵ مساحة قاعدة الهرم = (١٠)^{٢} = ١٠٠سم^{٢}

∴ المساحة الكلية للهرم = ٢٤٠ + ١٠٠ = ٣٤٠سم^{٢}



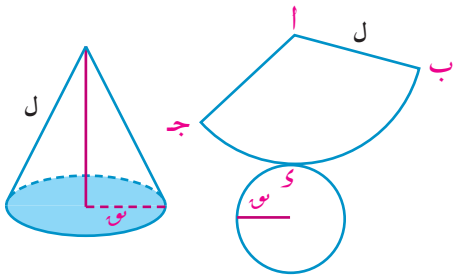
حاول أن تحل

(١) باستخدام الشبكة التى أمامك صف المجسم وأوجد مساحته الكلية.

ملاحظة هامة: يسمى الهرم الثلاثى المنتظم، **هرمًا ثلاثيًا منتظم الوجوه**؛ إذا كانت جميع أوجهه مثلثات متساوية الأضلاع و يكون أى منها قاعدة له

المساحة الكلية للمخروط القائم

من شبكة المخروط القائم فى الشكل المقابل



مساحة القطاع أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × طول $\overset{\frown}{ب جـ}$

= $\frac{١}{٢}$ ل × محيط قاعدة المخروط

= $\frac{١}{٢}$ ل × ٢ π ق = π ل ق

= المساحة الجانبية للمخروط القائم

تعلم

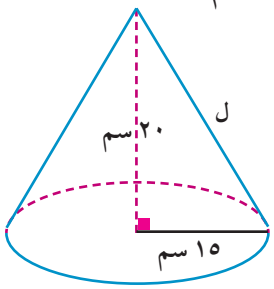
المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل ق

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل ق + π ق^{٢} = π ق (ل + ق)

حيث ل طول راسمه ، ق طول نصف قطر دائرته.

مثال

(٢) أوجد المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم ، وارتفاعه ٢٠سم.



الحل

لإيجاد طول راسم المخروط ل

∵ ل^{٢} = (٢٠)^{٢} + (١٥)^{٢} = ٦٢٥

∴ ل = ٢٥سم

∵ المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل نق ، نق = ١٥سم

∴ المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ٢٥ × ١٥ = π ٣٧٥ سم^{٢}

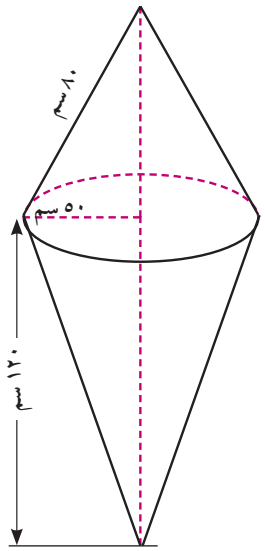
حاول أن تحل

(٢) أوجد المساحة الكلية لمخروط قائم طول راسمه ١٧سم وارتفاعه ١٥سم.

مثال

(٣) **ملاحة بحرية:** يوضح الشكل المقابل علامة ارشادية (شمندورة) لتحديد المجرى الملاحي وهي على هيئة مخروطان قائمان لهما قاعدة مشتركة.

أوجد تكاليف طلاؤه بمادة مقاومة لعوامل التعرية، علمًا بأن تكاليف المتر المربع الواحد منها ٣٠٠ جنيهًا.



الحل

مساحة سطح العلامة الارشادية = المساحة الجانبية للمخروط الأول + المساحة الجانبية للمخروط الثاني.

المخروط الأول: ل = ٨٠سم ، نق = ٥٠سم

∴ المساحة الجانبية = ٥٠ × ٨٠ π

= ٤٠٠٠ π سم^{٢}

المخروط الثاني: ع = ١٢٠سم، نق = ٥٠ سم ∴ ل = $\sqrt{(١٢٠)^{٢}+(٥٠)^{٢}}$ = ١٣٠سم

∴ المساحة الجانبية = ٥٠ × ١٣٠ π

= ٦٥٠٠ π سم^{٢}

مساحة سطح العلامة الارشادية = (π(٦٥٠٠ + ٤٠٠٠) = ١٠٥٠٠ π سم^{٢}

≃ ٣,٢٩٩ متر مربع

تكاليف الطلاء = ٣,٢٩٩ × ٣٠٠ = ٩٨٩,٧ جنيهًا



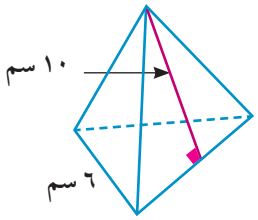
حاول أن تحل

(٣) غطاء مصباح على شكل مخروط قائم محيط دائرته ٨٨سم وارتفاعه ٢٠سم، احسب مساحته لأقرب سنتيمتر مربع.

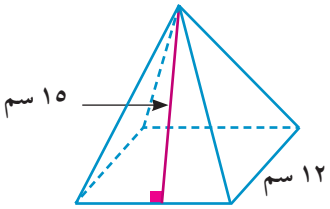
تمـارين الدرس الثانى

(١) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل هرم منتظم حسب البيانات المعطاه

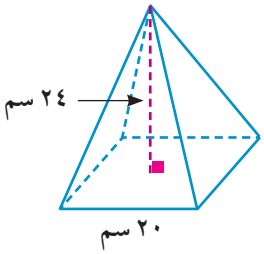
أ



ب

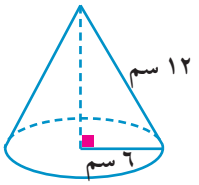


ج

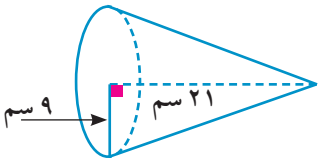


(٢) أوجد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لكل مخروط القائم حسب البيانات المعطاه.

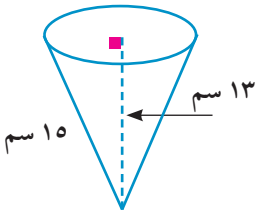
أ



ب



ج

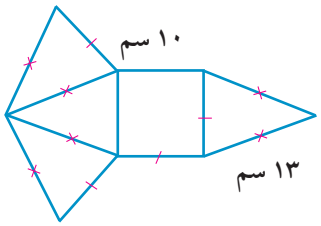


(٣) هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢سم وارتفاعه الجانبى ١٠ $\sqrt{3}$ سم. أوجد:

أ مساحته الجانبية

ب مساحته الكلية

(٤) **الربط بالصناعة:** تصنع عبوات منتجات أحد المصانع من الورق المقوى بطى شبكة المجسم المقابلة.



أ أوجد مساحة الورق المقوى المستخدم لإنتاج ١٠٠٠ عبوه .

ب إحسب تكاليف الورق المقوى المستخدم إذا كان تكلفة المتر المربع الواحد منه ١٥ جنيهًا.

(٥) طويت قطعة من الورق المقوى على شكل قطاع دائرى طول نصف قطر دائرته ٣٦سم وقياس زاويته ٢١٠° لتصنع مخروطًا دائريًا قائمًا له أكبر مساحة. أوجد ارتفاع المخروط.

(مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ $ن^2$ هـ $ئ$ ، $ن$ طول نصف قطر دائرة القطاع ، هـ $ئ$ قياس زاويته بالراديان)

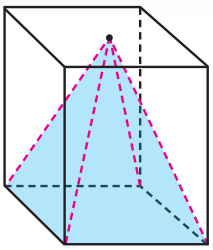
(٦) أوجد طول نصف قطر دائرة مخروط قائم، إذا كان طول راسمه ١٥سم، ومساحته الكلية ١٥٤π سم٢.

الدرس ٣

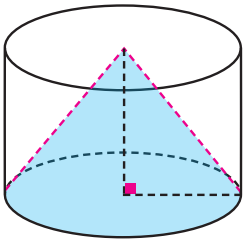
حجم الهرم والمخروط القائم

Volumes of pyramids and cones

سبق أن تعلمت كيفية حساب حجم المنشور القائم وحجم الاسطوانة الدائرية القائمة.



هل تستطيع تقدير حجم الهرم بدلالة حجم المنشور القائم الذى له نفس مساحة قاعدته ونفس ارتفاعه؟

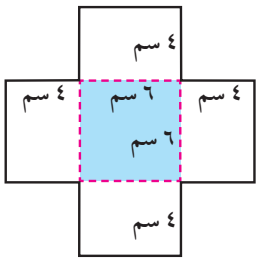


هل تستطيع تقدير حجم المخروط القائم بدلالة حجم إسطوانة لها نفس مساحة قاعدته ونفس ارتفاعه؟

نشاط

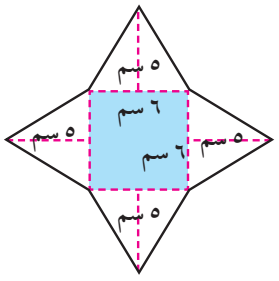
المقارنة بين حجمى هرم ومنشور لهما نفس مساحة القاعدة ونفس الارتفاع.

١- ارسم على ورق مقوى شبكتى الهرم والمنشور الموضحتين فى الرسم أمامك.



٢- إقطع وإطوى كل شبكة لتصنع نموذجين أحدهما السطح الجانبى لهرم رباعى، والثانى منشور قائم مفتوح من أعلى.

٣- إملاء الهرم بحبات الأرز أو الرمل وأفرغه فى المنشور ، كرر ذلك حتى يمتلئ المنشور تمامًا.



لاحظ أن المحتويات (حبات الأرز أو الرمل) التى تلزمك لملء المنشور سوف تملأ تمامًا ثلاثة أهرامات.

أى أن حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ حجم المنشور الذى له نفس مساحة قاعدة الهرم (ق) ونفس ارتفاع الهرم (ع).

سوف تتعلم

- إيجاد حجم الهرم المنتظم.
- إيجاد حجم المخروط القائم
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية تتضمن حجم كل من الهرم المنتظم والمخروط القائم.

المصطلحات الأساسيّة

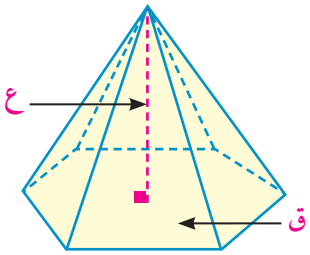
رأس	Vertex
قاعدة	Base
وجه	Face
محور	Axis
نصف قطر	Radius
حجم	Volume

الأدوات والوسائل

- آله حاسبة علمية – برامج رسومية للحاسوب

حجم الهرم Volume of a Pyramid

تعلم



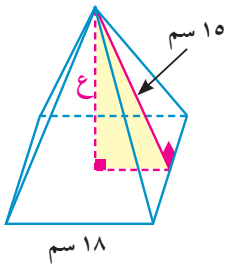
حجم الهرم يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه.

أى أن: حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ ق × ع

حيث (ق) مساحة القاعدة ، (ع) إرتفاع الهرم.

مثال

(١) احسب حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨سم وارتفاعه الجانبى ١٥سم.



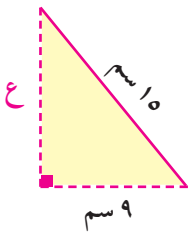
الحل

أولاً: حساب مساحة قاعدة الهرم (ق)

∵ الهرم رباعى منتظم ∴ قاعدته مربعة الشكل

مساحة قاعدة الهرم (ق) = ١٨ × ١٨ = ٣٢٤ سم^{٢}

ثانيًا: حساب ارتفاع الهرم (ع)



∵ ع^{٢} + (٩)^{٢} = (١٥)^{٢} فيثاغورث

∴ ع^{٢} = (١٥)^{٢} - (٩)^{٢} = ١٤٤ ، ع = ١٢ سم

∵ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ ق × ع

∴ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × ٣٢٤ × ١٢ = ١٢٩٦سم^{٣}

تذكر أن

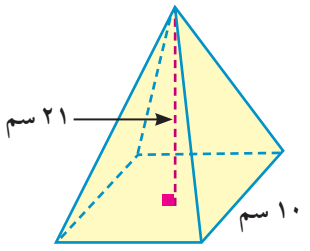
مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه ن، وطول ضلعه س تساوى

$\frac{ن}{٤}$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

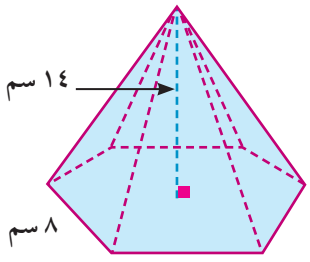
حاول أن تحل

(١) أوجد حجم الهرم المنتظم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاه.

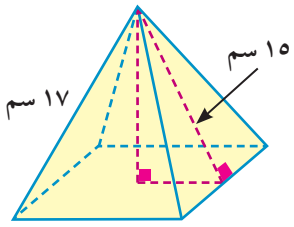
أ



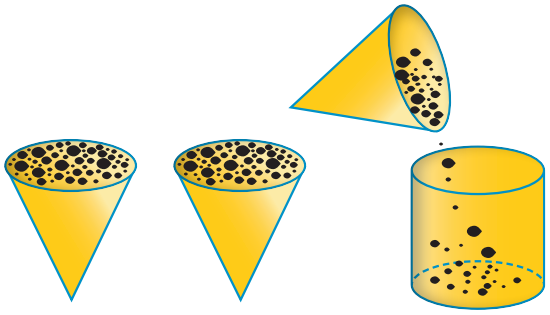
ب



ج



فكر: عند المقارنة بين حجمى مخروط دائرى قائم واسطوانة قائمة لهما نفس مساحة القاعدة ونفس الارتفاع نجد أن :

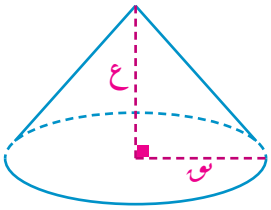


حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ حجم الاسطوانة

كيف تفسر ذلك رياضيًا؟

حجم المخروط *Volume of a cone*

تعلم



حجم المخروط يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته فى ارتفاعه

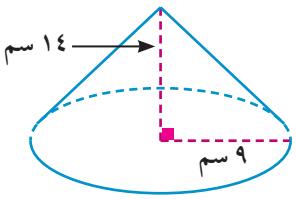
أى أن: **حجم المخروط** = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع

حيث (نق) طول نصف قطر دائرة المخروط ، (ع) ارتفاع المخروط

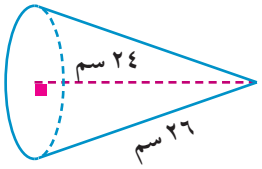
حاول أن تحل

(٢) أوجد حجم المخروط القائم الموضح بالشكل مستخدمًا البيانات المعطاه.

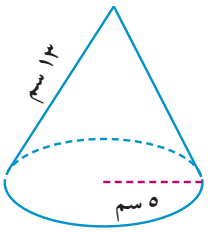
أ



ب



جـ



مثال

(٢) **الربط بالفيزياء:** سبيكة من الذهب الخالص على هيئة مخروط قائم إرتفاعه ٤,٢سم وطول نصف قطر دائرته ١,٥سم. أوجد كثافة الذهب إذا كان كتلة السبيكة ١٩١جم.

الحل

∵ حجم المخروط = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع ، نق = ١,٥سم ، ع = ٤,٢سم

∴ حجم الذهب فى السبيكة = $\frac{\pi}{3}$ (١,٥)^2 (٤,٢) = ٩,٨٩٦ سم^3

∵ الكثافة = $\frac{\text{الكتلة}}{\text{الحجم}}$ ∴ كثافة الذهب = $\frac{١٩١}{٩,٨٩٦} \simeq$ ١٩,٣ جم/سم^3

حاول أن تحل

(٣) قطعة من الشيكولاته على هيئة مخروط قائم حجمه ٢٧ πسم^3 ومحيط قاعدته ٦ πسم أوجد ارتفاعه.

مثال

(٣) **الربط بالصناعة:** هرم خماسى منتظم من النحاس، طول ضلع مضلع قاعدته ١٠سم وارتفاعه ٤٢سم، صهر وحول إلى مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم. فإذا علم أن ١٠٪ من النحاس فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل، أوجد إرتفاع المخروط لأقرب رقم عشرى واحد.

الحل

∵ مساحة الخماسى المنتظم = $\frac{٥}{٤}$ س^2 ظتا $\frac{\pi}{٥}$ حيث س طول ضلعه

∴ مساحة قاعدة الهرم = $\frac{٥}{٤} \times ١٠ \times ١٠$ ظتا ٣٦° = $\frac{١٢٥}{\text{ظا }٣٦^\circ} \simeq$ ١٧٢سم^3

∵ حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{172}{3}$ × ٤٢ = ٢٤٠٨سم^3

∴ حجم النحاس فى المخروط = $\frac{90}{100}$ × ٢٤٠٨ = ٢١٦٧,٢سم^3

$\frac{\pi}{3}$ (١٥)^2 ع = ٢١٦٧,٢ حيث ع ارتفاع المخروط القائم

∴ ع = $\frac{3 \times 2167,2}{\pi 225}$ ≃ ٩,٢سم

حاول أن تحل

(٤) مكعب من الشمع طول حرفه ٢٠سم صهر وحول إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٢١سم أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ١٢٪ من الشمع فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل.

ملاحظة هامة: تقدر سعة حاوية بحجم السائل الذى تحتويه، ولحساب سعتها تستخدم نفس قوانين حساب الحجوم، ووحدة قياس السعة هى اللتر

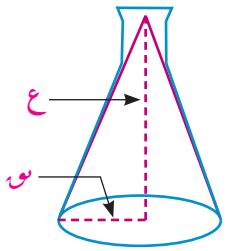
١ لتر = ١٠٠٠ ملليلتر = ١٠٠٠سم^3

تذكر أن

السعة هى حجم الفراغ الداخلى لأى جسم أجوف

مثال

(٤) **الربط بالكيمياء:** دورق مخروطى الشكل سعته ١٥٤ مل. ارتفاعه ١٢سم أوجد طول نصف قطر قاعدته ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)



الحل

سعة الدورق = حجم المخروط القائم = ١٥٤سم^3

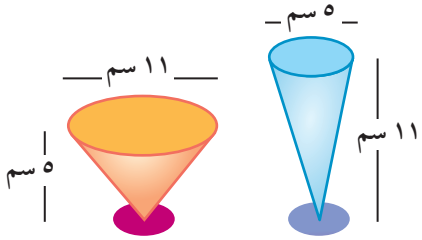
$\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times$ نق^2 × ١٢ = ١٥٤ ∴ نق^2 = $\frac{49}{4}$

∴ نق = ٣,٥سم

حاول أن تحل

(٥) أ ، ب كأسان للشراب. أيهما سعته أكبر؟

أوجد الفرق بين سعتيهما.



نشاط

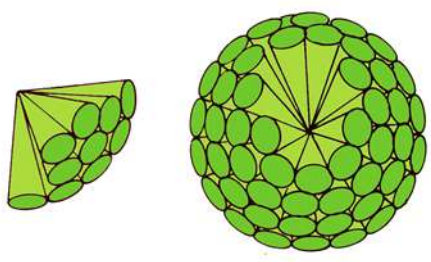
تعلم أن: إذا غمرت كرة طول نصف قطرها نق فى مخبار مدرج به ماء فإن حجم الكرة = حجم الماء المزاح

ويكون حجم الكرة = $\frac{4}{3}\pi$ نق^3

مستعينًا بالشكل الذى أمامك وحجم المخروط الدائرى القائم،

برهن أن:

مساحة سطح الكرة = ٤π نق^2



تمـاريـن الدرس الثالث

(١) أوجد حجم هرم رباعى منتظم طول ضلع مضلع قاعدته ٢٠سم وارتفاعه ٣٦سم.

(٢) احسب لأقرب رقم عشرى واحد، حجم هرم خماسى منتظم طول ضلع قاعدته ٤٠سم وارتفاعه ١٠سم.

(٣) هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٩سم وحجمه ٣٠٠سم^{٣}. أوجد طول ضلع مضلع قاعدته.

(٤) هرم رباعى منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠سم^{٢} وارتفاعه الجانبى ٢٠سم أوجد حجمه.

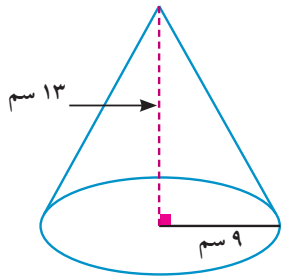
(٥) أيهما أكبر حجمًا؟ مخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ١٥سم وارتفاعه ٢٠سم ، أم هرم رباعى منتظم ارتفاعه ٤٠سم ومحيط قاعدته ٤٨سم.

(٦) أوجد حجم مخروط قائم محيط قاعدته ٤٤سم وارتفاعه ٢٥سم.

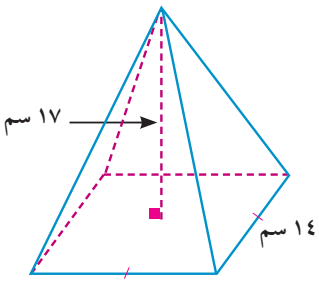
(٧) أوجد حجم مخروط قائم مساحته الجانبية ٢٢٠سم وطول راسمه ١٤سم.

(٨) رتب المجسمات التالية من الأصغر حجمًا إلى الأكبر حجمًا.

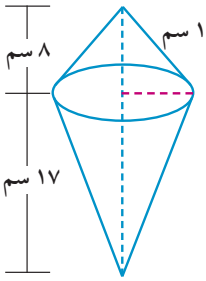
أ



ب



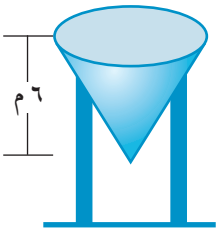
ج



(٩) **الربط بالسياحة :** صنع نموذج للهرم الأكبر من سبيكة معدنية كثافتها ٢,٣جم/سم^{٣}. إذا كان طول ضلع قاعدة النموذج ١١,٥سم وارتفاعه ٧سم ، فإحسب كتلته لأقرب رقم عشرى واحد.

(١٠) **الربط بالفيزياء:** إناء أسطوانى الشكل به ماء، غمر فيه جسم معدنى على شكل مخروط قائم ارتفاعه ١٢سم وطول نصف قطر قاعدته ٢سم غمرا كاملًا ، فإرتفع سطح الماء فى الإناء بمقدار ١سم . أوجد طول قطر قاعدة الإناء.

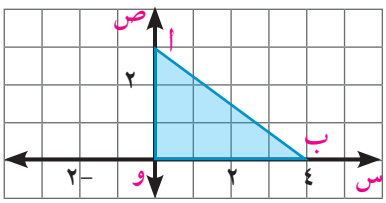
(١١) **هندسة مدنية:** صهريج مياه على شكل مخروط قائم حجمه ٣٢ π م^{٣} وارتفاعه ٦م.
أوجد طول نصف قطر قاعدته ومساحته الكلية.



(١٢) يوضح الشكل المقابل مستوى إحداثى متعامد إحسب بدلالة π حجم الجسم الناشئ عند دوران المثلث أ ب و ، دورة كاملة حول:

أ محور السينات

ب محور الصادات



(١٣) **تفكير ناقد:** مخروط دائرى قائم حجمه ١٠٠سم^{٣}. أوجد حجمه عندما:

أ يتضاعف ارتفاعه ب يتضاعف طول نصف قطره.

ج يتضاعف ارتفاعه وطول نصف قطره. ماذا تستنتج؟ فسر إجابتك.

الدرس ٤

معادلة الدائرة

Equation of a circle

سوف تتعلم

- كتابة معادلة الدائرة بدلالة إحداثيى مركزها وطول نصف قطرها.
- الصورة العامة لمعادلة الدائرة
- تعين إحداثيى مركز دائرة وطول نصف قطرها. من الصورة العامة لمعادلة الدائرة.
- نمذجة وحل مشكلات حياتية تتضمن معادلة الدائرة.

المصطلحاتُ الأساسيّةُ

دائرة	Circle
مركز	Center
نصف قطر	Radius
قطر	Diameter
مستوى إحداثى	Cartesian plane
معادلة	Equation
صورة عامة	General Form

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- ورق مربعات



معادلة الدائرة هى علاقة بين الإحداثى السينى والاحداثى الصادى لأى نقطة تنتمى للدائرة، وكل زوج مرتب (س ، ص) يحقق هذه العلاقة (المعادلة) يمثل نقطة تنتمى إلى هذه الدائرة.

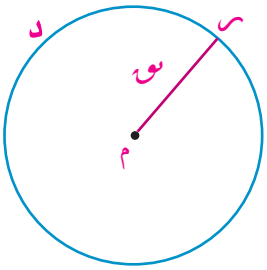
هل تمثل معادلة الدائرة دالة؟ فسر إجابتك.

تعريف

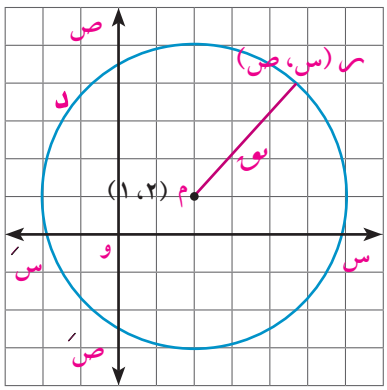
الدائرة:

هى مجموعة نقط المستوى التى تكون على نفس البعد الثابت من نقطة ثابتة فى المستوى.

لاحظ:



- تسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ويرمز لها عادة بالرمز م ، كما يسمى البعد الثابت طول نصف قطر الدائرة ويرمز له بالرمز نق.
- إذا رمزنا لدائرة بالرمز د ، وكانت ر نقطة تنتمى إليها، فإن : د = {ر : م ر = نق ، نق > ٠}
- فى مستوى احداثى متعامد



إذا كانت النقطة ر (س ، ص) تنتمى لدائرة د طول نصف قطرها يساوى ٤ وحدات ومركزها النقطة م (٢ ، ١) فإن:

م ر = نق = ٤

وبتطبيق قانون البعد بين نقطتين تكون:

$(س - ٢)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = (٤)^{٢}$

$\therefore (س - ٢)^{٢} + (ص - ١)^{٢} = ١٦$

هى معادلة الدائرة د

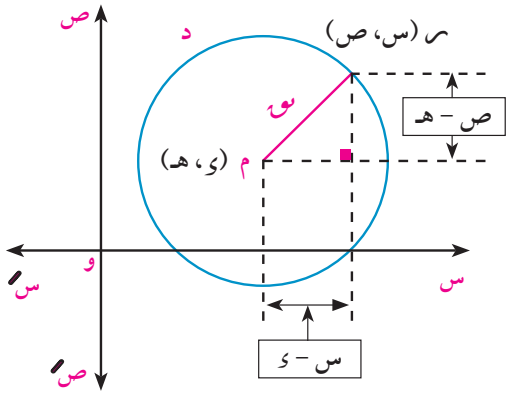
تعلم

معادلة الدائرة
The equation of a circle

(بدلالة إحداثيى مركزها وطول نصف قطرها)

فى مستوى احداثى متعامد:

إذا كانت النقطة ر (س ، ص) تنتمى إلى دائرة د مركزها النقطة (ى ، هـ) وطول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات فإن معادلة الدائرة د هى:



$$(س - ى)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = نق^{٢}$$

مثال

(١) اكتب معادلة دائرة د مركزها النقطة م (٥ ، ٢) وطول نصف قطرها يساوى ٦ وحدات.

الحل

بفرض أن النقطة ر (س ، ص) ∋ الدائرة د

∵ مركز الدائرة م(٥ ، ٢) ، طول نصف قطر الدائرة = ٦ وحدات

∴ ى = ٥ ، هـ = ٢ ، نق = ٦

وتكون معادلة الدائرة هى $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = (٦)^{٢}$

أى: $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٣٦$

حاول أن تحل

(١) اكتب معادلة الدائرة اذا كان مركزها:

أ م (٤ ، -٣) ، وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

ب م (٧ ، -١) ، وطول قطرها يساوى ٨ وحدات.

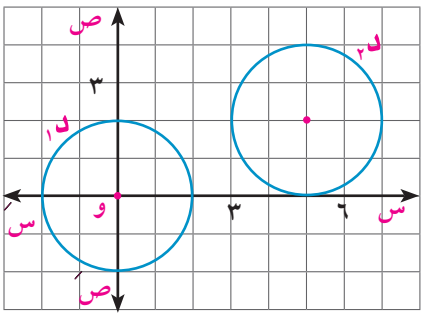
جـ م (٢ ، ٠) ، وطول قطرها يساوى $٨\sqrt{٢}$ فى الوحدات.

د م (٠ ، -٥) ، وتمر بالنقطة أ(-٢ ، -٩)

هـ نقطة الأصل وطول نصف قطرها يساوى نق من الوحدات.

مثال

(٢) يبين الشكل المقابل الدائرتان د١ ، د٢ اثبت أن الدائرتان متطابقتان ثم أوجد معادلة كل منهما.



الحل

تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفى قطريهما.

الدائرة د١ : مركزها (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها نق١ = ٢ وحدة.

الدائرة د٢ : مركزها (٥ ، ٢) وطول نصف قطرها نق٢ = ٢ وحدة

∵ $نق_{١}$ = $نق_{٢}$ = ٢ ∴ الدائرتان متطابقتان

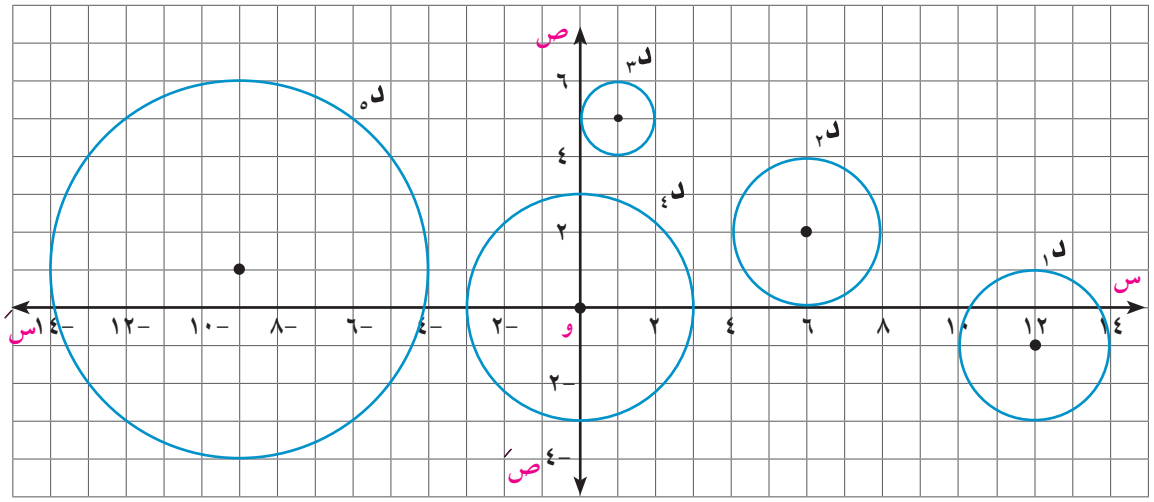
وتكون: معادلة $د_{١}$ $س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٤ ، معادلة $د_{٢}$ $(س - ٥)^{٢}$ + $(ص - ٢)^{٢}$ = ٤

لاحظ: الدائرة $د_{٢}$ هى صورة الدائرة $د_{١}$ بالانتقال (٥ ، ٢)

تفكير ناقد: إذا كانت الدائرة $د_{٣}$ هى صورة الدائرة $د_{١}$ بالانتقال (-٤ ، ٣) فأكتب معادلة الدائرة $د_{٣}$.

حاول أن تحل

(٢) (أ) اكتب معادلة كل دائرة فى الشكل التالى



(ب) أى الدوائر السابقة متطابقة؟ فسر إجابتك.

فكر: أين تقع النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ بالنسبة للدائرة د: $(س_{١} - ى)^{٢}$ + $(ص_{١} - هـ)^{٢}$ = $نق^{٢}$ إذا كان:

(أ) $(س_{١} - ى)^{٢}$ + $(ص_{١} - هـ)^{٢}$ < $نق^{٢}$ (ب) $(س_{١} - ى)^{٢}$ + $(ص_{١} - هـ)^{٢}$ > $نق^{٢}$

مثال

(٣) بين أن النقطة (٤ ، -١) هى إحدى نقط الدائرة د التى معادلتها : $(س - ٣)^{٢}$ + $(ص - ٥)^{٢}$ = ٣٧

الحل

بالتعويض بإحداثيي النقطة (٤ ، -١) فى الطرف الايمن لمعادلة الدائرة.

∴ $(٤ - ٣)^{٢}$ + $(-١ - ٥)^{٢}$ = ١ + ٣٦ = ٣٧ = الطرف الايسر

∴ النقطة (٤ ، -١) تنتمى إلى الدائرة د

لاحظ أن: إذا كان $(س_{١} - ٣)^{٢}$ + $(ص_{١} - ٥)^{٢}$ < ٣٧ فإن النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ تقع خارج الدائرة د.

و إذا كان $(س_{١} - ٣)^{٢}$ + $(ص_{١} - ٥)^{٢}$ > ٣٧ فإن النقطة $(س_{١} ، ص_{١})$ تقع داخل الدائرة د.

حاول أن تحل

(٣) بين أى النقط التالية تنتمى إلى الدائرة د التى معادلتها: $(س - ٦)^{٢}$ + $(ص + ١)^{٢}$ = ٢٥، ثم حدد موضع النقط الأخرى بالنسبة إلى الدائرة د حيث:

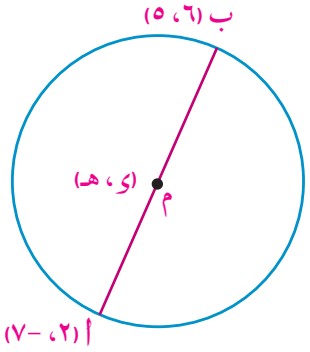
أ(٩ ، ٣) ، ب(٧ ، ٥) ، جـ(٣ ، ٣) ، ى(٢ ، -٣)

مثال

٤ اكتب معادلة الدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ حيث أ(٢ ، -٧) ، ب(٦ ، ٥)

الحل

بفرض أن النقطة م(ى ، هـ) مركزًا للدائرة التى قطرها $\overline{أب}$ ، فتكون النقطة م منتصف $\overline{أب}$



∴ احداثيا م: $ى = \frac{٦+٢}{٢} = ٤$ ، $هـ = \frac{٥+(-٧)}{٢} = -١$

$ق^{٢} = (أ م)^{٢} = (٤ - ٢)^{٢} + [-١ - (-٧)]^{٢}$

$= (٢)^{٢} + (٦)^{٢} = ٤٠$

وتكون معادلة الدائرة هى: $(س - ٤)^{٢} + [ص - (-١)]^{٢} = ٤٠$

أى $(س - ٤)^{٢} + (ص + ١)^{٢} = ٤٠$

فكر: هل تحقق النقطة (٦ ، ٥) معادلة الدائرة؟ لماذا؟

هل تنتمى النقطة (٦ ، -٧) للدائرة السابقة فسر إجابتك.

حاول أن تحل

٤ اكتب معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (-٢ ، ٧)، وتمر بالنقطة أ (٢ ، ١٠)

ب مركزها النقطة م (٥ ، ٤)، وتمس المستقيم س = ٢

جـ مركزها م يقع فى الربع الأول من المستوى الإحداثى، وطول نصف قطرها يساوى ٣ وحدات، والمستقيمان س = ١ ، ص = ٢ مماسان لها.

مثال

٥ أوجد إحداثيا المركز، وطول نصف قطر كل من الدائرتين:

أ $(س - ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ١٧$

ب $(س + ١)^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

الحل

نعلم أن معادلة الدائرة بدلالة إحداثيى المركز (ى ، هـ) وطول نصف قطرها ق هى :

$(س - ى)^{٢} + (ص - هـ)^{٢} = ق^{٢}$

بمقارنة كل مقدار جبرى فى المعادلة بنظيره فى المعادلات المعطاه نجد:

أ $س - ى = س - ٢$ ∴ $ى = ٢$

$ص - هـ = ص + ٣$ ∴ $هـ = -٣$

$ق^{٢} = ١٧$ ∴ $ق = \sqrt{١٧}$

فيكون مركز الدائرة النقطة (٢ ، -٣) وطول نصف قطرها يساوى $\sqrt{١٧}$ وحدة.

ب س - ى = س + ١ ∴ ى = -١

ص - هـ = ص ∴ هـ = ٠

ر٢ = ١٦ ∴ ر = ٤

∴ مركز الدائرة النقطة (-١ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوى ٤ وحدات.

حاول أن تحل

٥ أى من الدوائر المعطاه يمثل دائرة مركزها (٣ ، -٤) وطول نصف قطرها ٣ وحدات.

أ (س - ٣)٢ + (ص - ٤)٢ = ٩

ب (س + ٣)٢ + (ص - ٤)٢ = ٩

ج (س - ٣)٢ + (ص + ٤)٢ = ٩

د (س + ٣)٢ + (ص + ٤)٢ = ٩

٦ أوجد إحداثيا المركز وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:-

أ (س - ٣)٢ + (ص + ٥)٢ = ١٥

ب س٢ + (ص + ٤)٢ = ٩

ج (س + ١)٢ + (ص + ٧)٢ = $\frac{٣}{٤}$

د (س + ١)٢ = ١٣ - ص٢

تعلم

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

General form of the equation of a circle

علمت أن معادلة الدائرة التى مركزها (ى ، هـ) وطول نصف قطرها يساوى ر من الوحدات:

هى : (س - ى)٢ + (ص - هـ)٢ = ر٢

بفك الأقواس

∴ س٢ + ص٢ - ٢ى س - ٢هـ ص + ى٢ + هـ٢ - ر٢ = صفر (١)

∵ ى ، هـ ، ر ثوابت ∴ المقدار ى٢ + هـ٢ - ر٢ = مقدارًا ثابتًا

بوضع ل = -ى ، ك = -هـ ، جـ = ى٢ + هـ٢ - ر٢

تصبح المعادلة (١) على الصورة س٢ + ص٢ + ٢ل س + ٢ك ص + جـ = ٠

وتسمى بالصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (-ل ، -ك) وطول نصف قطرها يساوى ر حيث

ر = $\sqrt{ل^٢ + ك^٢ - جـ}$ ، ل٢ + ك٢ - جـ > ٠

مثال

٦ أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٦ ، -٣) وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

الحل

∵ مركز الدائرة (-ل ، -ك) فى الصورة العامة لمعادلة الدائرة

، مركز الدائرة (٦ ، -٣) معطى

∴ ل = -٦ ، ك = ٣

∵ ر = ٥ ، جـ = ل٢ + ك٢ - ر٢

∴ جـ = (-٦)٢ + (٣)٢ - (٥)٢ = ٢٠

وتكون الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي: $س^{٢} + ص^{٢} - ١٢س + ٦ص + ٢٠ =$ صفر.

يمكن التحقق من صحة الحل باستخدام معادلة الدائرة: $(س - ٦)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = ٢٥$ ثم تبسيطها ومقارنة النتائج

حاول أن تحل

(٧) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (-٢ ، ٥)، وطول نصف قطرها يساوى $\sqrt{٥٧}$ وحدة.

ب مركزها النقطة ن (٥ ، -٣)، وتمر بالنقطة ب (٢ ، ١).

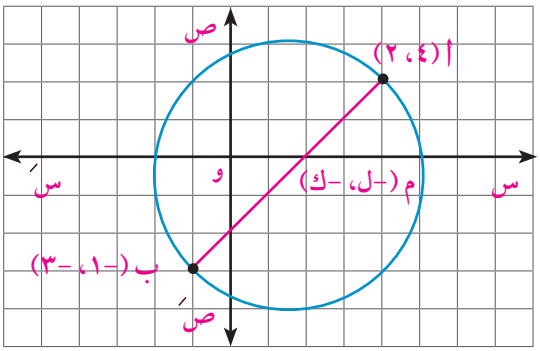
مثال

(٧) اكتب الصورة العامة لمعادلة دائرة إذا كانت النقطتين أ(٤ ، ٢) ، ب(-١ ، -٣) طرفا قطر فيه.

الحل

بفرض ان النقطة م (-ل ، -ك) مركزًا للدائرة التى قطرها $\overline{أب}$

∴ م منتصف $\overline{أب}$ ويكون احداثيا النقطة م هما $(\frac{٤-١}{٢} ، \frac{٢-٣}{٢})$



∴ -ل $= \frac{٣}{٢}$ أى ل $= \frac{-٣}{٢}$

-ك $= \frac{-١}{٢}$ أى ك $= \frac{١}{٢}$

بالتعويض عن ل ، ك فى الصورة العامة لمعادلة الدائرة

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠$

∴ $س^{٢} + ص^{٢} - ٣س + ص + جـ = ٠$ (١)

∵ الدائرة تمر بالنقطة أ(٤ ، ٢) فهى تحقق معادلتها

∴ $(٤)^{٢} + (٢)^{٢} - ٣(٤) + ٢ + جـ = ٠$ أى جـ $= -١٠$

بالتعويض فى المعادلة (١)

∴ الصورة العامة لمعادلة الدائرة هى: $س^{٢} + ص^{٢} - ٣س + ص - ١٠ =$ صفر

حاول أن تحل

(٨) إذا كانت النقط أ(٣ ، -٢) ، ب (٣ ، ٨) ، جـ (-١ ، ٠) تنتمى إلى دائرة واحدة. فاثبت أن $\overline{أب}$ قطرًا فيها، ثم اكتب الصورة العامة لمعادلتها.

ملاحظة هامة

من الصورة العامة لمعادلة الدائرة $س^{٢} + ص^{٢} + ٢ل س + ٢ ك ص + جـ = ٠$ **نستنتج أن**

أولًا: المعادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص

ثانيًا: معامل $س^{٢}$ = معامل $ص^{٢}$ = الوحدة

ثالثًا: خالية من الحد الذى يحتوى س ص أى معامل س ص = ٠

ولكى تمثل معادلة من الدرجة الثانية فى س ، ص دائرة يلزم تحقق الشروط الثلاثة السابقة

وأن يكون $ل^{٢} + ك^{٢} - جـ > ٠$

تعلم

لتعين احداثيا مركز دائرة وطول نصف قطرها من الصورة العامة لمعادلتها:

١- تحقق أولًا من وضع المعادلة فى الصورة العامة حيث معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = الوحدة

٢- احداثيا المركز (-ل ، -ك) أى $\left(\frac{-\text{معامل س}}{٢} ، \frac{-\text{معامل ص}}{٢}\right)$

٣- طول نصف قطر الدائرة يساوى ﻫ حيث ﻫ = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$ ، ل^{٢} + ك^{٢} - جـ > ٠

مثال

(٨) أى المعادلات الآتية لدائرة؟ و إذا كانت معادلة دائرة أوجد مركزها وطول نصف قطرها.

أ) ٣س^{٢} + ٢ص^{٢} + ٦س - ٨ص - ١٠ = ٠

ب) س^{٢} + ص^{٢} + ٤س + ٢٥ = ٠

جـ) ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ١٢س + ٨ص - ٣٠ = ٠

د) ٤س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٤٩

الحل

أ) معامل س^{٢} ≠ معامل ص^{٢} ∴ المعادلة ليست لدائرة

ب) معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

ل = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ ، ك = $\frac{٠}{٢}$ = ٠ ، جـ = ٢٥

∴ ل^{٢} + ك^{٢} - جـ = (٢)^{٢} + (٠)^{٢} - ٢٥ < ٠

∴ المعادلة ليست لدائرة

جـ) بقسمة طرفى المعادلة على ٢ ∴ س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٤ص - ١٥ = ٠

∴ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

ل = -٣ ، ك = ٢ ، جـ = -١٥

∴ ل^{٢} + ك^{٢} - جـ = (-٣)^{٢} + (٢)^{٢} - (-١٥) = ٢٨ > ٠

∴ المعادلة لدائرة مركزها (٣ ، -٢) ، ﻫ = $\sqrt{٢٨}$ = $٢\sqrt{٧}$ وحدة

د) بقسمة طرفى المعادلة على ٤ ∴ س^{٢} + ص^{٢} = $\frac{٤٩}{٤}$

∴ معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = الوحدة ، المعادلة خالية من الحد المحتوى على س ص

ل = ٠ ، ك = ٠ ، جـ = $\frac{٤٩}{٤}$

∴ ل^{٢} + ك^{٢} - جـ = $\frac{٤٩}{٤}$ > ٠

∴ المعادلة لدائرة مركزها نقطة الأصل ، ﻫ = $\sqrt{\frac{٤٩}{٤}}$ = $\frac{٧}{٢}$ وحدة

حاول أن تحل

(٩) أى المعادلات الآتية لدائرة؟ و إذا كانت معادلة دائرة، أوجد مركزها وطول نصف قطرها.

أ) س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٤ص + ١٧ = ٠

ب) س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٢ص = ٠

جـ) ٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ٤س + ٣٩ = ٠

د) س^{٢} + ص^{٢} - ٢س ص - ٦ = ٠

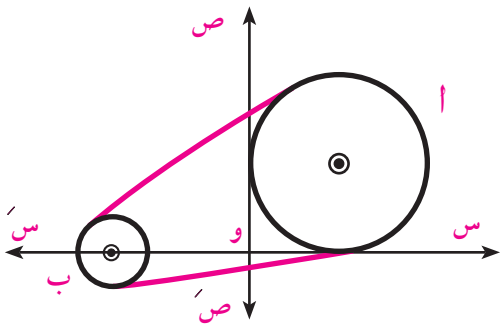
تفكير ناقد: هل الدائرتين $د_{١}$: $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠س - ٨ص + ١٦ = ٠$
$د_{٢}$: $س^{٢} + ص^{٢} + ١٤س + ١٠ص - ٢٦ = ٠$ متماستان من الخارج؟ فسر إجابتك.

مثال

٩ الربط بالصناعة: يوضح الشكل المقابل بكرة أ فى آلة تمس محورى الاحداثيات تدور بواسطة سير يمر على بكرة صغيرة ب معادلة دائرتها: $س^{٢} + ص^{٢} + ١٤س + ٤٥ = ٠$ أوجد:

أ معادلة دائرة البكرة أ إذا كان طول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات.

ب البعد بين مركزى البكرتين إذا كان كل وحدة من المستوى الإحداثى تمثل ٦سم



الحل

أ ∵ البكرة أ تمس محورى الاحداثيات ، وطول نصف قطرها يساوى ٥ وحدات

∴ مركز دائرتها النقطة م(٥ ، ٥) أى ل = -٥ ، ك = -٥

∵ $جـ = ل^{٢} + ك^{٢} - نق^{٢}$ ∴ $جـ = (-٥)^{٢} + (-٥)^{٢} - (٥)^{٢} = ٢٥$

وتكون معادلتها: $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠س - ١٠ص + ٢٥ =$ صفر

ب ∵ معادلة دائرة البكرة ب: $س^{٢} + ص^{٢} + ١٤س + ٤٥ = ٠$

∴ ل = ٧ ك = ٠ جـ = ٤٥ $نق = \sqrt{٤٩ - ٤٥} = ٢$

ويكون مركزها النقطة ن (-٧ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوى ٢ وحدة

∴ البعد بين مركزى البكرتين = م ن $= \sqrt{(٥ + ٧)^{٢} + (٥)^{٢}} = ١٣$ وحدة

∵ كل وحدة فى المستوى الإحداثى تمثل ٦سم

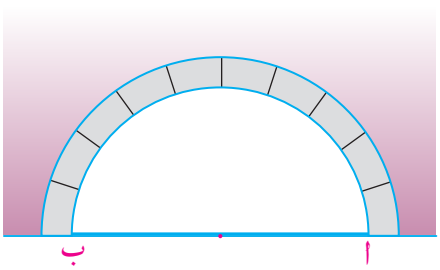
∴ البعد بين البكرتين = ١٣ × ٦ = ٧٨سم

حاول أن تحل

١٠ الربط بالطرق: يوضح الشكل المقابل مقطعًا رأسيًا فى أحد الأنفاق الدائرية لمرور السيارات معادلة دائرته:

$س^{٢} + ص^{٢} - ٤س - ٦ص - ١٢ = ٠$ ، $\overline{أب}$ قطر فيها.

أوجد أقصى أرتفاع للنفق إذا كانت وحدة الأطوال فى المستوى الإحداثى تمثل ٧٠سم.



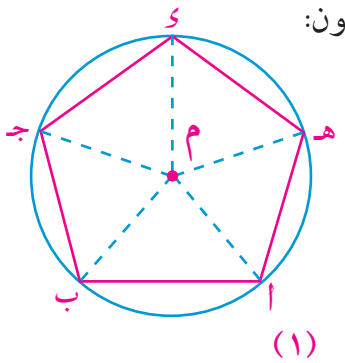
مثال

١٠ الربط بالهندسة: أوجد لأقرب سنتيمتر مربع مساحة سطح شكل خماسى منتظم تمر برؤوسه الدائرة:

$س^{٢} + ص^{٢} + ٦س - ١٢ص + ٥ = ٠$ علمًا بأن كل وحدة فى المستوى الإحداثى تمثل ٥سم.

الحل

بفرض أن م مركز الدائرة المارة برؤوس الخماسى المنتظم أ ب جـ ء هـ فيكون:



(١)

أ ب = ب جـ = جـ ء = ء هـ = أ هـ (وهى أوتار فى الدائرة م)

∴ ق(∠أ م ب) = ق(∠ب م جـ) = ... = $\frac{360^\circ}{5}$ = ٧٢°

ويلاحظ تقسيم الشكل أ ب جـ ء هـ إلى ٥ مثلثات متطابقة

أى أن مساحة الخماسى المنتظم = ٥ × مساحة △ م أ ب

= ٥ × $\frac{1}{2}$ م أ × م ب جا ٧٢°

= $\frac{5}{2}$ ن^2 جا ٧٢°

من معادلة الدائرة: ل = ٣ ك = -٦ جـ = ٥

∵ ن^2 = ل^2 + ك^2 - جـ ∴ ن^2 = ٩ + ٣٦ - ٥ = ٤٠ وبالتعويض فى (١)

∴ مساحة الخماسى المنتظم = $\frac{5}{2}$ (٤٠) جا ٧٢° = ٩٥,١٠٥٦٥ وحد مربعة

∵ كل وحدة طول فى المستوى الإحداثى تمثل ٥سم

∴ الوحدة المربعة فى المستوى الإحداثى تمثل مساحة قدرها (٥)^2 = ٢٥سم^2

وتكون مساحة الخماسى المنتظم = ٩٥,١٠٥٦٥ × ٢٥ ≃ ٢٣٧٨ سم^2

تمـــاريـــن الدرس الرابع

اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) النقطة (٢ ، ٠) تقع على

أ محور السينات ب محور الصادات جـ المستقيم ص = ٢س د الدائرة س^2 + ص^2 = ٩

(٢) إذا كانت أ(٣ ، -٧) ، ب(-٣ ، ٥) فإن إحداثيى النقطة التى تنصف $\overline{أب}$ هما

أ (٠ ، ١) ب (١ ، ٠) جـ (٠ ، -١) د (-١ ، ٠)

(٣) المسافة بين النقطتين (٢ ، ٤) ، (١٠ ، -٢) تساوى

أ ٩ ب ١٠ جـ $3\sqrt{10}$ د ٦

(٤) الدائرة س^2 + ص^2 = ٢٥ مركزها (٠ ، ٠) وتمر بالنقطة

أ (١ ، ٤) ب (٥ ، ٠) جـ (٢٥ ، ٠) د (٥ ، ١)

(٥) معادلة الدائرة التى مركزها (٣ ، -٥) وطول نصف قطرها يساوى ٧ وحدات هى:-

أ (س - ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤٩ ب (س + ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤٩

جـ (س + ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤٩ د (س - ٣)^2 + (ص + ٥)^2 = ٤٩

٦ محيط الدائرة التى معادلتها $س^{٢} + ص^{٢} = ٨$

أ ٨π ب ٦٤π ج $٢\sqrt{٢}\pi$ د $٢\sqrt{٤}\pi$

٧ أكتب معادلة الدائرة التى مركزها م وطول نصف قطرها ر إذا كان:

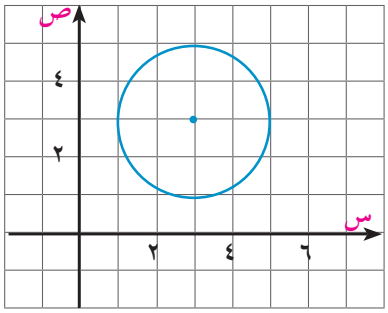
أ م (٢، ٣) ، ر = ٥ ب م(٠ ، ٠) ، ر = ٤

ج م (٣، ٠) ، ر = ٦ د م(٤ ، -٥) ، ر = $\sqrt{٧}$

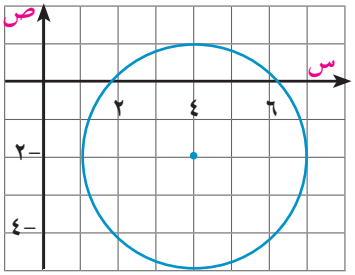
هـ م (٠، -١) ، ر = $٢\sqrt{٣}$ و م(-٤ ، -٣) ، ر = $\frac{٣}{٢}$

٨ اكتب معادلة الدائرة التى يمثلها الرسم المعطى

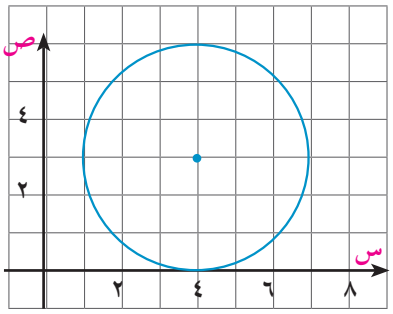
أ



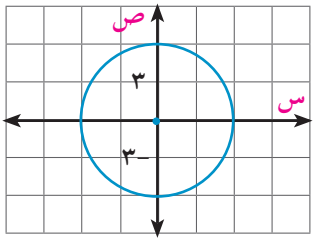
ب



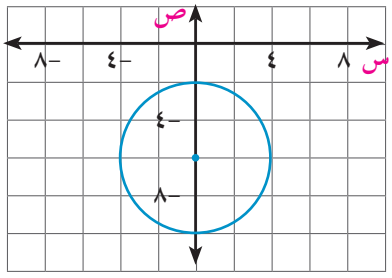
ج



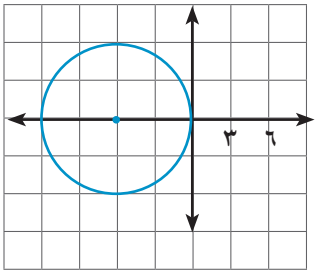
د



هـ



و



٩ أوجد معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها النقطة م (٧ ، -٥)، وتمر بالنقطة أ(٣ ، ٢).

ب $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة حيث أ(٦ ، -٤) ، ب(٠ ، ٢).

ج مركزها النقطة (٥ ، -٣)، وتمس محور السينات.

(١٠) أوجد إحداثيا المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية:

أ) $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٧$

ب) $(س + ٣)^{٢} + (ص - ٥)^{٢} = ٤٩$

ج) $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٦$

د) $س^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ٢٤$

(١١) اكتب الصورة العامة لمعادلة الدائرة فى الحالات الآتية:

أ) مركزها م(٣ ، ١)، وطول قطرها يساوى ٨.

ب) مركزها م (٠ ، ٠)، وتمر بالنقطة أ (-١ ، ٣)

ج) مركزها م (-٥ ، ٠)، وتمر بالنقطة ب (٣ ، ٤)

د) $\overline{أب}$ قطر فيها حيث أ(٣ ، -٧) ، ب(٥ ، ١)

(١٢) أوجد احداثيا المركز، وطول نصف القطر لكل من الدوائر الآتية

أ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٦ص - ١٢ = ٠$

ب) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢س = ٨$

ج) $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ١٠ص = ٠$

د) $س^{٢} + ص^{٢} - ٨س = ١٢$

(١٣) بين أى دائرتين مما يلى متطابقتان

أ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٤ص - ٣ = ٠$ ، $س^{٢} + ص^{٢} + ٦س - ١١ = ٠$

ب) $س^{٢} + ص^{٢} - ١٤س + ٣٧ = ٠$ ، $س^{٢} + ص^{٢} + ١٠س + ١٣ = ٠$

(١٤) بين أى المعادلات الآتية لدائرة ، ثم أوجد مركزها وطول نصف قطرها:

أ) $س^{٢} + ص^{٢} + ٨س - ١٦ص - ١ = ٠$

ب) $س^{٢} + ٢ص^{٢} + ٦س - ٥ص = ٠$

ج) $\frac{١}{٤}س^{٢} + \frac{١}{٤}ص^{٢} + س - ٨ = ٠$

د) $س^{٢} + ص^{٢} + ٢س ص - ١٢ = ٠$

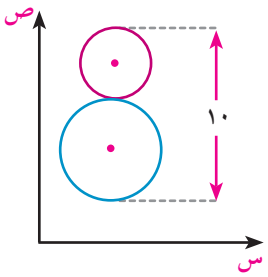
هـ) $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٤ص + ٧ = ٠$

و) $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} + ٣ص - ٨ = ٠$

(١٥) الملاحة البحرية: يقع رادار عند الموقع أ(٧ ، -٩) ويغطى منطقة دائرية طول نصف قطرها يساوى ٣٠ وحدة طول. اكتب معادلة الدائرة التى تحد مجال عمل الرادار فى المستوى الإحداثى. هل يمكن للرادار رصد سفينة فى الموقع ب (٢٥ ، -٣٠)؟ فسر إجابتك.

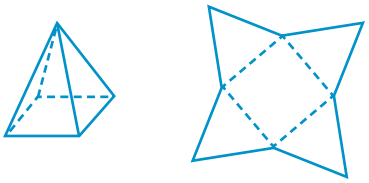
(١٦) التصميم المعمارى: صمم مهندس معمارى مبنى على شكل ثمانى منتظم تمر رؤوسه بالدائرة $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ١٢ص - ٦٠ = ٠$ إحسب مساحة المبنى لأقرب وحدة مربعة .

(١٧) الصناعة: يبين الشكل المقابل ترسان فى آلة مركزيهما يقعا على مستقيم يوازى محور الصادات وأقصى بعد بين حافتيهما ١٠ وحدات. أوجد معادلة الترس الأصغر علمًا بأن معادلة الترس الأكبر هى: $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠س - ٨ص + ٣٢ = ٠$

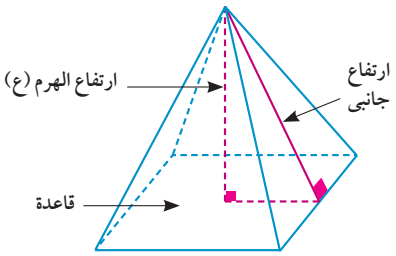


(١٨) تفكير ابداعى: أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطتين أ(١ ، ٣) ، ب(٢ ، -٤) ويقع مركزها على محور السينات.

ملخص الوحدة



شبكة هى شكل ذى بعدين يمكن طيه ليكون شكلا ثلاثي الأبعاد.



الهرم هو مجسم له قاعدة واحدة وجميع أوجهه الأخرى مثلثات تشترك فى رأس واحدة. ويسمى الهرم حسب عدد أضلاع مضلع قاعدته فيكون هرمًا ثلاثيًا أو رباعيًا أو خماسيًا .. وهكذا.

الهرم المنتظم هرم قاعدته مضلع منتظم مركزه موقع العمود المرسوم من رأس الهرم عليها فنجد:

- أحرفه الجانبية متساوية فى الطول.
- أوجهه الجانبية سطوح مثلثات متساوية الساقين ومتطابقة.
- الارتفاعات الجانبية متساوية

الهرم القائم يكون الهرم قائمًا إذا وفقط إذا كان موقع العمود المرسوم من رأس الهرم على قاعدته يمر بمركزها الهندسي.

المخروط الدائري القائم هو الجسم الذى ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية حول أحد ضلعى القائمة دورة كاملة.

المساحة الجانبية للهرم = $\frac{1}{2}$ محيط قاعدته × ارتفاعه الجانبى

المساحة الكلية للهرم = مساحته الجانبية + مساحة قاعدته

المساحة الجانبية للمخروط القائم = π ل $نق$ حيث ل طول راسمه ، $نق$ طول نصف قطر قاعدته

المساحة الكلية للمخروط القائم = π ل $نق$ + π $نق^{2}$ = π $نق$ (ل + $نق$)

حجم الهرم يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته × ارتفاعه.

حجم المخروط يساوى ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته × ارتفاعه

الدائرة: هى مجموعة نقط المستوى التى تكون علي نفس البعد الثابت من نقطة ثابتة فى المستوى.

معادلة الدائرة

معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (ى ، هـ) وطول نصف قطرها يساوى $نق$ هى: (س - ى)^{2} + (ص - هـ)^{2} = $نق^{2}$

الصورة العامة لمعادلة الدائرة

الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها النقطة (-ل ، -ك) وطول نصف قطرها يساوى $نق$

هى: س^{2} + ص^{2} + ٢ ل س + ٢ ك ص + جـ = صفر

حيث $نق$ = $\sqrt{\text{ل}^{2} + \text{ك}^{2} - \text{جـ}}$ ، ل^{2} + ك^{2} - جـ > ٠.

لتعيين إحداثيا مركز دائرة وطول نصف قطرها من الصورة العامة لمعادلتها

- تحقق أولاً من وضع المعادلة فى الصورة العامة حيث: معامل س^{٢} = معامل ص^{٢} = الوحدة
- إحداثيا المركز (-ل ، - ك) أى ($\frac{\text{- معامل س}}{٢}$ ، $\frac{\text{- معامل ص}}{٢}$)
- طول نصف قطر الدائرة يتعين من العلاقة ن = $\sqrt{\text{ل}^{٢} + \text{ك}^{٢} - \text{جـ}}$ ، حيث ل^{٢} + ك^{٢} - جـ > ٠

تمارين عامة (الوحدة الثالثة)

(١) أكمل كل مماياتى:

أ الأوجه الجانبية فى الهرم المنتظم

ب الارتفاعات الجانبية فى الهرم المنتظم

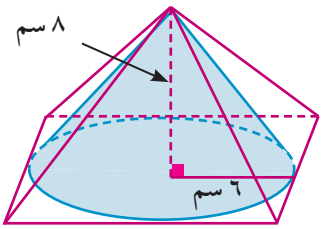
جـ ارتفاع المخروط القائم طول راسمه

د حجم الهرم = ... ×

هـ طول نصف قطر الدائرة س^{٢} + ص^{٢} - ١٨ = ٠ يساوى

و معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (٢ ، ٣) وطول نصف قطرها ٤ وحدات هى

(٢) أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة مستعينًا بالشكل المقابل:



أ المساحة الجانبية للمخروط القائم تساوى :

(٦٠سم^{٢} ، ٦٠ π سم^{٢} ، ٤٨ سم^{٢} ، ٤٨ π سم^{٢})

ب المساحة الكلية للهرم المنتظم تساوى

(٣٦٠ سم^{٢} ، ٢٤٠ سم^{٢} ، ٣٨٤ سم^{٢} ، ٤٣٢ سم^{٢})

جـ حجم الهرم يساوى

(٦٤ سم^{٣} ، ٩٦ سم^{٣} ، ٤٨٠ سم^{٣} ، ٣٨٤ سم^{٣})

د النسبة بين حجم الهرم إلى حجم المخروط تساوى :

(π : ٣ ، ٤ : π ، π : ٤ ، ٣ : π)

(٣) هرم منتظم حجمه ١٢سم^{٣} ومساحة قاعدته ٤سم^{٢}. إحسب ارتفاعه.

(٤) هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠سم^{٣} و إرتفاعه ١٢سم. إحسب مساحته الجانبية.

(٥) أوجد لأقرب رقم عشرى واحد المساحة الكلية لمخروط قائم طول قطر قاعدته ١٠سم وارتفاعه ١٢سم.

(٦) أكتب معادلة الدائرة إذا كان:

أ مركزها م(٣ ، ٥) وطول نصف قطرها ٤ وحدات.

ب مركزها م (-٢ ، ٠) وطول قطرها ٩ وحدات.

ج مركزها م (٠ ، ٩) وتمر بالنقطة (٤ ، ٦)

د $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة حيث أ (٥ ، -٢) ، ب (١ ، ١٠)

(٧) اكتب الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٥، -١٢) وتمر بنقطة الأصل.

(٨) أوجد مركز وطول نصف قطر كل دائرة مما يلى:

أ $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٧$

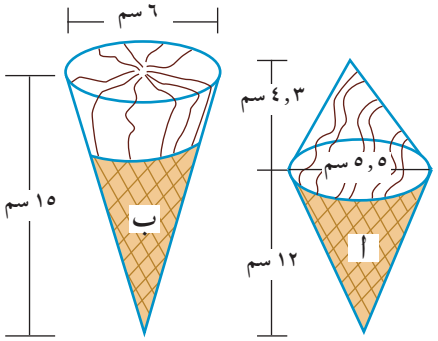
ب $(س + ٤)^{٢} + ص^{٢} = ٩$

ج $س^{٢} + ص^{٢} - ٢س + ٦ص - ٦ = ٠$

د $٢س^{٢} + ٢ص^{٢} - ١٠ص - ٧ = ٠$

(٩) **تخطيط المدن:** فى رسم لإحدى المدن على مستوى إحداثى متعامد كل وحدة فيه تمثل ٥ أمتار وجد أن الدائرة: $س^{٢} + ص^{٢} - ٦س + ٨ص + ١١ = ٠$ تحدد أحد ميادينها أوجد لأقرب متر مربع مساحة هذا الميدان.

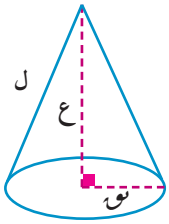
(١٠) **الصناعة:** تقوم خطوط إنتاج مصنع آيس كريم بانتاج نوعين أ ، ب الموضحين بالشكل المقابل أى النوعين أكبر حجمًا. هل يتغير حجم النموذج أ بتغير إرتفاعى المخروطين المتلاصقين على أن يظل مجموع الإرتفاعين ثابتًا؟ فسر إجابتك.



(١١) **السياحة:** اهتمت فرنسا بالآثار المصرية القديمة فنقلت بعضها إلى باريس لتعرض فى متاحفها.. كما أنشأت هرمًا من الزجاج الشفاف مشابهًا للهرم الأكبر ليكون مدخلاً رئيسيًا لمتحف اللوفر بباريس. إذا علمت أن ارتفاعه ٢١,٦ متر وطول ضلع قاعدته ٣٥ مترًا ، فأوجد مساحة الزجاج المستخدم فى بناؤه لأقرب متر مربع.

اختبار تراكمي

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:



(١) المساحة الكلية (السطحية) للمخروط القائم تساوى:

أ π ق ل　　ب $\frac{\pi}{٣}$ ق^{٢} ع

ج π ق (ق + ل)　　د $\frac{\pi}{٣}$ ق (ق ع + ٣ل)

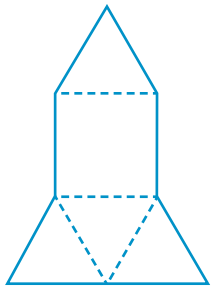
(٢) هرم رباعى منتظم محيط قاعدته ٣٦سم وارتفاعه ١٠سم فإن حجمه يساوي

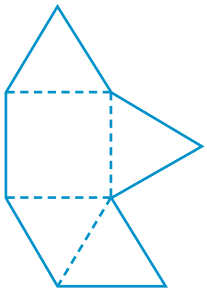
أ ٨١٠ سم^{٢}　　ب ١٨٠ سم^{٢}　　ج ٣٦٠ سم^{٢}　　د ٢٧٠ سم^{٢}

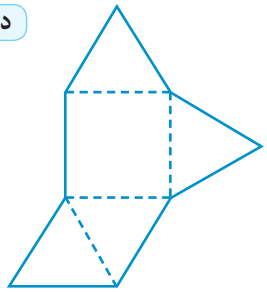
(٣) الدائرة (س + ٢)^{٢} + ص^{٢} + ٢ص = ٠ مركزها النقطة:

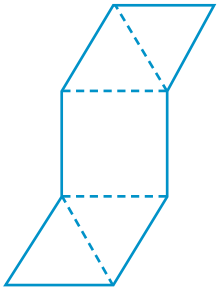
أ (٢ ، ٢)　　ب (-٢ ، -١)　　ج (٢ ، -١)　　د (-٤ ، ٢)

(٤) أى الشبكات التالية لاتصنع هرمًا رباعيًا منتظمًا عند طيها.

أ 

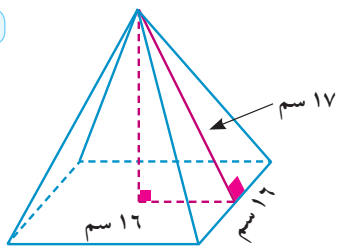
ب 

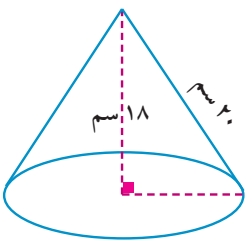
ج 

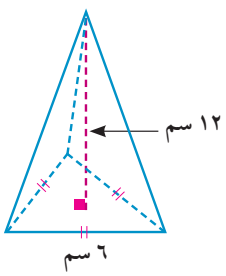
د 

اسئلة ذات إجابات قصيرة

(٥) أوجد حجم كل مجسم ممايأتى لأقرب سنتيمتر مكعب.

أ 

ب 

ج 

(٦) أوجد معادلة دائرة مركزها النقطة (٢، -٧) وتمر بالنقطة (١، ٣)

(٧) أى الدائرتين الاتيتين متطابقتين؟ فسر إجابتك.

أ س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٢ص - ٥ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ٦س - ٤ = ٠

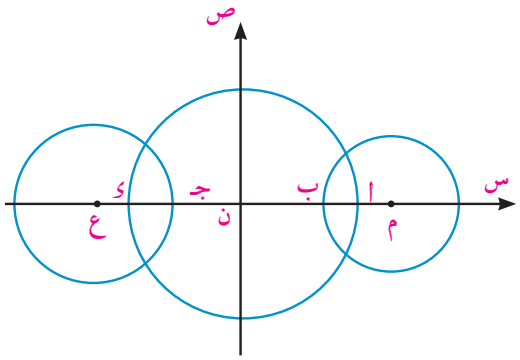
ب س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ٨ص = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} + ١٢ص + ١٦ = ٠

اسئلة ذات إجابات طويلة:

(٨) أحسب لأقرب رقم عشرى واحد حجم هرم خماسى منتظم طول ضلع مضلع قاعدته ١٦سم وارتفاعه ١٢سم.

(٩) قطاع دائرى م أ ب طول نصف قطر دائرته ١٨سم وقياس زاويته المركزية ٦٠ °طوى ولصق نصفى قطره ليكون اكبر مساحة جانبية لمخروط قائم. أوجد حجم هذا المخروط.

(١٠) **فى الشكل المقابل:** النقط م ، ن ، ع تقع علي محور السينات لمستوى إحداثى متعامد، ن نقطة الأصل. إذا كان م، ن، ع مراكز ثلاث دوائر أطوال أنصاف أقطارها هى ٥، ٩، ٦ من الوحدات على الترتيب، جـ ى = ٢ م أ = ٤ وحدات. أوجد الصورة العامة لمعادلة كل من الدوائر الثلاث.



هل تحتاج إلى مساعدة إضافية:

إذا لم تستطع حل السؤال رقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
إرجع إلى	٣-٢	٣-٣	٣-٤	٣-١	٣-٣	٣-٤	٣-٤	٣-٣	مهارات عامة	٣-٤



الوحدة الرابعة

الاحصاء والاحتمال

Statistics and Probability

مقدمة الوحدة

يعد علم الاحصاء علمًا هامًا من بين علوم الرياضيات التى تخدم باقى العلوم فقد تطور علم الاحصاء من مجرد عمليات العد التى كانت تجريها الدول فى العصور الوسطى للتعرف على قدراتها البشرية والمادية إلى علم له أصول وقواعد واستخدامات كثيرة فى مختلف المجالات من فلك ووراثة وعلم نفس وسياسة واقتصاد وطب... ، وكذلك فى مجالات التخطيط ورسم السياسات واتخاذ القرار فى شتى مجالات المعرفة، فهو يساعدنا علي فهم ما حدث فى الماضى لاستخدامه فى التنبؤ بالمستقبل ورسم الخطط المستقبلية ، ويرجع التطور الهائل فى استخدام نظرية الاحتمالات بصورة واضحة إلي عام ١٩٣٢ حيث تمت أول معالجة حديثة لهذه النظرية على يد العالم " نيومان" والعالم " بيركوف" باستخدام كثير من مفاهيم الرياضيات الحديثة مثل مفهوم المجموعات وأشكال ڤن وصار تطبيقها فى الحياة العملية أوسع فإنتاج المصانع يعتمد فى تحسين نوعيته وتسويقه على الاحتمالات كذلك التخطيط للتنمية الاقتصادية والاجتماعية بل أن سياسات الدول فى الأمم المتقدمة تعتمد علي الاحتمالات .

فى هذه الوحدة نتناول مخطط الساق والأوراق لعرض البيانات واستخدامه فى حساب بعض مقاييس التشتت وكذلك مفهوم الاحتمال وكيفية تطبيقه عندما تكون جميع النتائج الممكنة الحدوث عددها محدود ومتساوية الامكانات (متكافئة الفرص)

أهداف الوحدة

فى نهاية الوحدة من المتوقع أن يكون الطالب قادرًا على أن:

- يمثل مجموعة من البيانات بطريقة الساق والأوراق.
- يتعرف بعض مقاييس التشتت والتى تعتمد على حساب قيم الربيع الأدنى – الربيع الأعلى – الربيع الأوسط)
- يستنتج قيمة كل من الربيع الأدنى والأعلى والأوسط باستخدام طريقة الساق والأوراق .
- يتعرف التجربة العشوائية، وبعض التجارب العشوائية الشهيرة مثل : القاء قطعة نقود مرة واحدة أو مرتين أو ثلاث مرات ، القاء حجر النرد مرة واحدة أو مرتين.
- يتعرف العمليات الآتية على الاحداث (أو مايعرف بالأحداث المركبة) ويعبر عنها لفظيًا ورمزيًا ويمثلها باشكال ڤن (بمعلومية ف فضاء نواتج تجربة عشوائية ، أ، ب حدثين فى ف):
 - وقوع الحدث C
 - عدم وقوع الحدث أ.
 - وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)
 - وقوع أ و ب (وقوعهما معا)
 - وقوع الحدث أ فقط (وقوع أ وعدم وقوع ب)
 - وقوع الحدث ب فقط (وقوع ب وعدم وقوع أ)
 - وقوع أحدهما فقط) وقوع أ فقط أو وقوع ب فقط)
 - عدم وقوع أى من الحدثين (عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب)
 - عدم وقوع الحدثين معا(عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب)
 - عدم وقع ب فقط) وقوع أ أو عدم وقوع ب)
 - عدم وقوع أ فقط (وقوع ب أو عدم وقوع أ)
- يتعرف تطبيقات رياضية وحياتية بسيطة على الإحصاء والاحتمال



المصطلحات الأساسية

إحصاء	Statistics	تجربة عشوائية	Random Experiment
احتمال	Probability	فضاء العينة – فضاء النواتج	Sample space
تمثيل البيانات	Representing Data	قطعة نقود	Coin
مخطط الساق والأوراق	Stem–and –leaf plots	حجر نرد	Die
وصف البيانات	Descripting Data	حدث	Event
نزعة مركزية	Central Tendency	حدث بسيط (أولى)	Simple Event
تشتت	Disperison	حدث مركب	Compound Event
ربيعات	Quartiles	حدث مؤكد	Certain Event
ربيع أدنى	Lower Quartile	حدث مستحيل	Impossible Event
ربيع أعلى	Upper Quartile	العمليات على الأحداث	Operation of the Events
المدى الربيعى	Interquartile Range	احداث متنافية	Mutually Exclusive Events

دروس الوحدة

الدرس (٤ – ١): تمثيل البيانات.

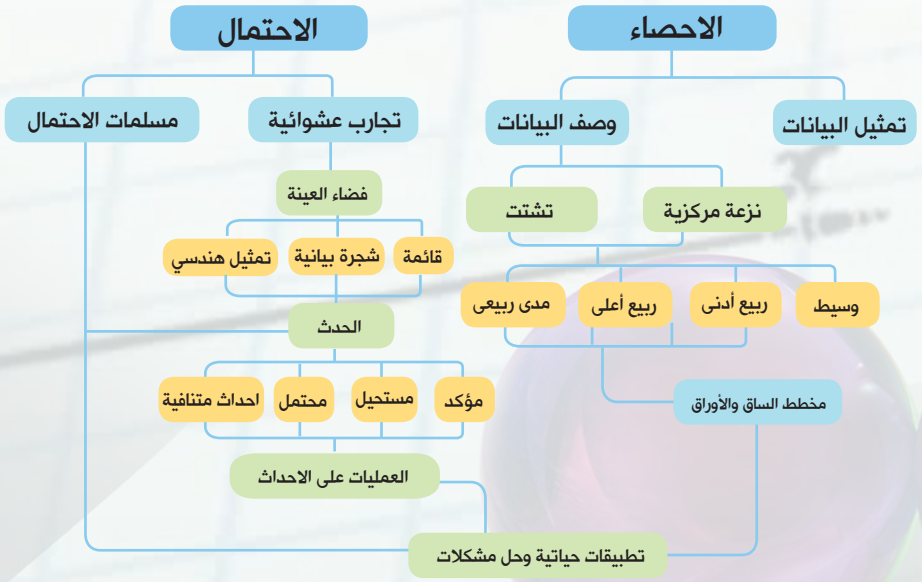
الدرس (٤ – ٢): وصف البيانات.

الدرس (٤ – ٣): الاحتمال.

الأدوات والوسائل

الة حاسبة علمية	Scientific calculator
الة حاسبة رسومية	Graphical calculator
برامج رسومية للحاسوب	Graphical programs

مخطط تنظيمى للوحدة



الدرس ١

تمثيل البيانات

Representing Data

سوف تتعلم

- تمثيل مجموعة من البيانات بطريقة الجذع (الساق) والورقة .
- استنتاج المعلومات من مخططات الساق والورقة.

المصطلحات الأساسيّة

- مخطط الساق والورقة

Stem–and leaf plots

الأدوات والوسائل

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

تقديم:

لدراسة ظاهرة أو مشكلة ما، نقوم بجمع البيانات حول المشكلة محل الدراسة ثم تنظم وترتب البيانات بشكل يساعد على إستخلاص المعلومات منها ، و يتوقف إختيار طرق تمثيل وعرض البيانات على نوع البيانات سواء أكانت بيانات كيفية (أسمية أو مرتبة) أم بيانات كمية (متصلة أو متقطعة) وقد سبق لك تنظيم البيانات فى صورة جداول تكرارية بسيطة أو جداول تكرارية ذى مجموعات.

وفيمايلى سوف نوضح كيفية تنظيم وتمثيل مجموعة من البيانات بطريقة الساق والأوراق.

مخطط الساق والورقة

Stem - and - leaf plats

مخطط الساق والورقة هو إحدى الطرق السريعة لتنظيم وتمثيل مجموعة صغيرة من البيانات الكمية على شكل شجرة تتكون من جذع (ساق) وأوراق، فيتم تقسيم كل قيمة من البيانات الكمية إلى جزأين أحدهما يمثل الساق والأخر يمثل الورقة.

عند تمثيل العدد ١٣٧ نختار أول أرقامه (رقم الآحاد) لتمثيل الورقة وباقى الأرقام لتمثيل الساق وتكتب على النحو التالى:

الورقة ← ٧ | ١٣ ← الساق ، والشكل المقابل يبين نماذج من تمثيل بعض الاعداد بهذا المخطط .

العدد	الساق	الورقة
٨٣	٨	٣
٥٣١٠	٥٣١	٠
٨	٠	٨
٢٤,٧	٢٤	٧
٢,٥٣	٢٥	٣

يتم عرض البيانات الكمية بطريقة الساق والأوراق وفق الخطوات التالية :

١- تحديد الساق وكتابة وحداته بترتيب تصاعدى فى شكل عمود رأسى .

٢- تسجيل قيم الأوراق المناظرة لكل وحدة ساق فى صف هذه الوحدة .

٣- ترتيب قيم الأوراق تصاعديًا وكتابة مفتاحًا يوضح كيفية قراءة الساق والأوراق.

مثال

(١) توضح البيانات التالية درجات ٢٠ طالبًا فى احد الاختبارات

٣٣ ٣٢ ٢٩ ٤٠ ٤١ ٢٨ ٤٠ ٢٨ ٣٧ ٢٦

٤٢ ٤٦ ٤٨ ٣٥ ٣٨ ٤٥ ٣٨ ٣٩ ٢٤ ٣٦

أ مثل هذه البيانات بطريقة الساق والأوراق.

ب كم عدد الطلاب الذين تقل درجاتهم عن ٣٠ درجة.

الحل

أ لتمثيل البيانات نتبع الخطوات التالية :

- نختار رقم العشرات لتمثيل الساق ورقم الآحاد لتمثيل الأوراق فتكون وحدات الساق ٢، ٣، ٤ تكتب وحدات الساق فى عمود رأسى ابتداءًا بأصغر قيمة ٢ وانتهاءًا بأكبر قيمة ٤.

الساق	الأوراق
٢	٤ ٦ ٨ ٨ ٩
٣	٦ ٩ ٨ ٨ ٥ ٧ ٢ ٣
٤	٥ ٨ ٦ ٢ ٠ ١ ٠

- نقوم بتوزيع الأوراق (رقم الآحاد) على كل وحدة ساق حتى لو تكرر.
- نرتب قيم الأوراق تصاعديًا، ونكتب مفتاحًا يوضح كيفية قراءة الساق والأوراق.

الساق	الأوراق
٢	٤ ٦ ٨ ٨ ٩
٣	٢ ٣ ٥ ٦ ٧ ٨ ٨ ٩
٤	٨ ٦ ٥ ٢ ١ ٠ ٠
المفتاح ٦\|٢=٢٦ درجة	

ب أوراق الساق ٢ تعبر عن الدرجات التى تقل عن ٣٠

∴ عدد الطلاب الذين تقل درجاتهم عن ٣٠ درجة يساوى ٥

لاحظ أن

عدد وحدات الأوراق يساوى عدد القيم

حاول أن تحل

(١) يبين الجدول المقابل:

درجة الحرارة العظمى المسجلة فى أحد الأيام بعدة محافظات :

درجات الحرارة العظمى (س°)				
١٨	٢٠	٣١	٢٢	١٧
٣١	١٨	١٧	٣٥	٢٤
١٩	٢٨	٢٠	٣٤	١٩

أ مثل هذه البيانات بطريقة الساق والأوراق

ب ما عدد المحافظات التى سجلت درجة حرارة تزيد عن ٣٠° س

تفكير ناقد : هل تجد تشابهًا بين تمثيل البيانات بالأعمدة وتمثيل البيانات بمخطط الساق والورقة ؟ فسر إجابتك.

مثال

(٢) يبين الجدول المقابل أوزان ١٨ طالبًا بالكيلو جرام فى أحد الفصول الدراسية .

الوزن بالكيلو جرام					
٦٢	٥٢	٦٠	٥٩	٦٣	٥٦
٥٧	٦٠	٦٧	٦٢	٥١	٦٧
٦٦	٦٩	٦٥	٦٤	٥٨	٥٤

أ مثل هذه الأوزان بطريقة الساق والأوراق .

ب ما عدد الطلاب الذين تزيد أوزانهم عن ٦٥ كيلو جرامًا.

ج ما عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن ٦٠ كيلو جرامًا.

الحل

نلاحظ تقارب الأوزان لذلك يمكن تصنيف الأوزان فى فترات كل منها ٥ كيلو جرام ٥٠ - ، ٥٥- ، ٦٠- ، ٦٥- فنختار رقم العشرات لتمثيل الساق ورقم الآحاد لتمثيل الأوراق ونقوم بتوزيع الأوراق (رقم الآحاد) على كل وحدة ساق تبعًا للفترة التى ينتمى إليها كما فى الشكل المقابل ويكون:

الساق	الأوراق
٥	٤ ١ ٢
٥	٨ ٧ ٩ ٦
٦	٥ ٤ ٠ ٢ ٢ ٠ ٣
٦	٩ ٦ ٧ ٧
المفتاح ٩\|٥ = ٥٩ كيلو جرام	

أ عدد الطلاب الذين تزيد أوزانهم عن ٦٥ كيلو جرامًا = ٤

ب عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن ٦٠ كيلو جرامًا = ٣ + ٤ = ٧

حاول أن تحل



(٢) فيمايلى الوقت بالدقائق الذى تستغرقه بعض السيارات لقطع مسافة معينة

٩٢ ٨٧ ٩٦ ٩٩ ١٠٧ ١٠٣ ١٠٧ ٩١ ٨٠ ٨٩

٨٦ ٨٤ ٩١ ٨٧ ١٠٣ ١٠٤ ١٠٥ ٨٦ ٩٤ ٨٣

أ مثل هذه البيانات بطريقة الساق والأوراق مستخدمًا:

أولاً : فترات كل منها ٥ دقائق **ثانيًا:** فترات كل من ١٠ دقائق

ب كم سيارة تقطع هذه المسافة فى زمن :

أولاً: أقل من ٩٥ دقيقة **ثانيًا:** أكثر من ١٠٠ دقيقة.

مثال

(٣) يبين الجدول المقابل قيمة الاستهلاك الشهرى للكهرباء بالجنيه لإحدى الأسر.

القيمة الشهرية لاستهلاك الكهرباء			
٤٢,٥	٤٥,٣	٤٣	٤٣,٨
٤٥,٩	٤٤,٨	٤٣,٧	٤٤
٤٢,٩	٤٥,١	٤٤,٢	٤٣,٩

أ مثل هذه البيانات بطريقة الساق والأوراق.

ب كم شهرًا زاد فيها قيمة استهلاك الكهرباء عن ٤٥ جنيهًا.

الحل

باختيار العدد الصحيح لتمثيل الساق والكسر العشرى لتمثيل الأوراق فتكون.

وحدات الساق ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦

نقوم بتوزيع الأوراق (الكسر العشرى) على كل وحدة ساق كما فى الشكل المقابل.

القيمة الشهرية لاستهلاك الكهرباء	
الأوراق	الساق
٥ ٩	٤٢
٠ ٨ ٧ ٢ ٣	٤٣
٨ ٠	٤٤
١ ٩ ٣	٤٥
المفتاح ٥\|٤٢= ٤٢,٥	

عدد الشهور التى زاد فيها استهلاك الكهرباء عن ٤٥ جنيهًا يساوى ٣

حاول أن تحل

(٣) مثل البيانات التالية بطريقة الساق والأوراق

٢٩ ١٢ ١٦ ٢٣ ٥٤ ٦٢ ٣٤ ٤٢ ٥٩ ٥٨ ٢٣

(٤) مثل البيانات التالية بطريقة الساق والأوراق :

٧١,٢ ٧٣ ٦٩,٧ ٧٢,٤ ٧٣,٣ ٦٩,٦ ٧٣,٢ ٧١,٣

٧٢,٢ ٧٠ ٧١,٣ ٧٢,٢ ٧٠,٥ ٧١,٥ ٧٢,٧

ما عدد المفردات التي تقل عن ٧١

تمـــاريـن الدرس الأول

الساق	الأوراق
٠	٣ ٥
١	٠ ١ ٤ ٥
٢	٣ ٧ ٧ ٧ ٨
٣	٢ ٢ ٣ ٥ ٦
٤	٠ ٧ ٨ ٩
٥	١ ١ ٧
المفتاح ٢\|٨ = ٢,٨	

من المخطط المقابل للساق و الأوراق اكمل:

(١) عدد القيم = ...

(٢) القيمة التى لها أكبر تكرار هى

(٣) القيمة الخامسة من البيانات المرتبة تصاعديًا هى

يمثل مخطط الساق و الأوراق المقابل درجة الحرارة العظمى خلال أحد الشهور على احدى المدن .أكمل :

الساق	الأوراق
١	٦ ٨ ٨ ٨ ٩ ٩ ٩
٢	٠ ٠ ١ ١ ٢ ٢ ٣ ٣ ٣ ٤ ٥ ٥ ٦
٣	٠ ٢ ٢ ٤ ٥ ٩
٤	٠ ١ ٢ ٣
المفتاح ٣\|٢ = ٢٣° س	

(٤) اصغر درجة حرارة ..

(٥) أكبر درجة حرارة

(٦) مدى درجات الحرارة

(٧) قيمة القراءة الثالثة والعشرون من درجات الحرارة المرتبة تنازليًا ...

(٨) عدد الأيام التى تقل فيها درجة الحرارة عن ٢٢ هى

مثل كل من البيانات التالية بطريقة الساق و الأوراق

(٩)

أطوال الطلاب بالسنتيمترات				
١٥٤	١٤١	١٤٠	١٥٦	١٦٢
١٥٠	١٦٤	١٥٢	١٥٧	١٤١
١٦٩	١٥٨	١٥٧	١٤٩	١٥٣

(١٠)

اعمار الطلاب بالسنوات				
١٦,٤	١٤,٦	١٥,٧	١٤,٣	١٦,١
١٥,٨	١٦,٢	١٤,٦	١٥,٢	١٥,٨
١٤,٤	١٦,٧	١٤,٨	١٥,٦	١٦,٧

(١١)

أوزان البيض لأقرب جرام				
٥٢	٥٧	٦٣	٥٤	٥٣
٥٨	٦٣	٥٩	٦٢	٥١
٦١	٥٠	٥٨	٥٩	٥٧

(١٢)

الأجر اليومى لعمال أحد المصانع				
٣٢	٢٢	٣١	٢٥	٣١
٣٤	٢١	٢٢	٣٠	٢٧
٢٥	٢٧	٢٦	٢٣	٢٨

الدرس ٢

وصف البيانات

Descripting Data

سوف تتعلم

- استنتاج قيمة الوسيط من مخطط الساق والأوراق:
- التعرف على الربيعات ربيع أدنى (ر١) - ربيع أعلى (ر٣) - ربيع أوسط (الوسيط)
- استنتاج قيم الربيعات من مخطط الساق والأوراق .
- التعرف على المدى الربيعى وحسابه من مخطط الساق والأوراق.

المصطلحات الأساسيّة

central tendency	نزعه مركزية
dispersion	تشتت
quartiles	ربيعيات
lower quartile	ربيع أدنى
upper quartile	ربيع أعلى
interquartile range	المدى الربيعى

الأدوات والوسائل

- آله حاسبة علمية .
- برامج رسومية .

تعد مقاييس النزعة المركزيةcentral tendency ومقاييس التشتت disperison من أهم المقاييس الاحصائية لوصف توزيع البيانات وتلخيص خصائصها.

مقاييس النزعة المركزية *Central tendency*

تهتم مقاييس النزعة المركزية لأية مجموعة من البيانات بتعيين قيمة واحدة تصف اتجاه هذه البيانات فى التمركز حولها وقد سبق لك دراسة بعض مقاييس النزعة المركزية مثل الوسط الحسابى والوسيط والمنوال.

لاحظ:

للبيانات الكمية المتقطعة يكون :

١- الوسط الحسابى لمجموعة من القيم = $\frac{\text{مجموع هذه القيم}}{\text{عددها}}$

٢- الوسيط هو القيمة العددية التى تقسم مجموعة من القيم المرتبة تصاعديًا (أو تنازليًا) إلى قسمين متساويين بحيث يكون عدد القيم الأكبر منها مساويًا لعدد القيم الأصغر منها.

فإذا كان عدد القيم (ن) فرديًا، فإن الوسيط هو القيمة التى ترتيبها $\frac{ن+١}{٢}$ وإذا كان عدد القيم (ن) زوجيًا، فإن الوسيط هو متوسط القيمتين اللتين ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢}+١$

٣- المنوال هو القيمة الأكثر تكرارًا.

استنتاج قيمة الوسيط من مخطط الساق والأوراق

مثال

(١) يمثل مخطط الساق والأوراق المقابل أوزان ١٧ لاعبًا لألعاب القوى بأحد الأندية استنتج من المخطط:

أ الوسيط ب الوزن المنوالى

الوزن بالكيلو جرام		
الأوراق	الساق	
٥ ٤ ٢	٣	
٣ ٣ ٣ ١	٤	
٩ ٨ ٨ ٧ ٤ ٢	٥	
٥ ٢ ١ ٠	٦	
٣	٢ = ٣٢ كيلو جرام	

الحل

بملاحظة مخطط الساق والأوراق نجد:

الأوراق مرتبة تصاعديًا وعددها ١٧ ورقة ∴ ترتيب الوسيط = $\frac{١٧+١}{٢}$ = ٩

الوزن بالكيلو جرام	
الأوراق	الساق
٤ ٥ ٢	٣
٣ ٣ ٣ ١	٤
٩ ٨ ٨ ٧ (٤) ٢	٥
٥ ٢ ١ ٠	٦
٣\|٢ = ٣٢ كيلو جرام	

أ الوسيط هو الوزن الذى تمثله الورقة التاسعة فى الترتيب

∴ الوسيط = ٥٤ كيلو جرامًا

ب الوزن المنوالى = ٤٣ كيلو جرامًا

فكر: هل يتأثر الوسيط بالقيم المتطرفة ؟ فسر إجابتك

كيف يمكن إيجاد الوسط الحسابى من مخطط الساق والأوراق ؟ فسر إجابتك.

حاول أن تحل

(١) استنتج الوسيط والمنوال لكل من مخططات الساق والأوراق التالية :

أ

الوزن بالكيلو جرام	
الأوراق	الساق
٢	١
٣ ١ ٠	٢
٩ ٦ ٥ ٢	٣
٨ ٦ ٦	٤
٣\|٢ = ٢٣	

ب

المسافة بالكيلو مترات	
الأوراق	الساق
٢ ٠	٣
٦ ٥ ٣ ١	٤
٧ ٦ ٥ ٣ ٢	٥
٠ ٠ ٥ ٣	٦
٤,٣=٤\|٣	

ج

الزمن بالدقائق	
الأوراق	الساق
٣	١٢
٧ ٦ ٥	١٢
٤ ٤ ٣ ٢	١٣
٩ ٩ ٩ ٨ ٨ ٦	١٣
٥ ٤ ٣ ٠	١٤
٧\|١٢ = ١٢٧	

الربيعات *Quartiles*

الربيعات هى قيم عددية تقسم البيانات إلى ٤ أجزاء متساوية كل جزء يحتوى على ٢٥ ٪ من البيانات وذلك بعد ترتيب البيانات تصاعديًا (أو تنازليًا)

تعريف ١

- الربيع الأدنى (الأول) Lower quartile : هو القيمة العددية التى يقل عنها ربع القيم و يزيد عنها ثلاثة أرباع القيم، و يرمز لها بالرمز ($ر_١$).
- الربيع الأدنى (الثالث) Upper quartile : هو القيمة العددية التى يقل عنها ثلاثة أرباع القيم و يزيد عنها ربع القيم، و يرمز لها بالرمز ($ر_٣$).

لاحظ أن :

١- **الربيع الأوسط (الثانى) $ر_٢$:** هو القيمة العددية التى يكون عدد القيم الأصغر منها مساويًا لعدد القيم الأكبر منها ، أى أن الربيع الأوسط هو الوسيط .

٢- عند حساب الربيعات نرتب البيانات تصاعديًا (أو تنازليًا) ثم نوجد ترتيب الربيع المطلوب حيث :

ترتيب $ر_١ = \frac{١}{٤} \times$ عدد القيم ، ترتيب $ر_٣ = \frac{٣}{٤} \times$ عدد القيم

إذا كانت النتيجة عددًا ليس صحيحًا (به كسور) فإن العدد الصحيح التالى يحدد رتبته و إذا كانت النتيجة عددًا صحيحًا فيتم تحديد الموضع المناظر لهذا العدد والموضع التالى له وتكون قيمة الربيع مساوية لمتوسط القيمتين المناظرتين لهذين الموضعين.

مثال

(٢) احسب الربيع الأدنى والربيع الأعلى للقيم التالية :

أ ٣٢ ، ٢٩ ، ٧ ، ١٦ ، ٢٥ ، ١٧ ، ١٨ ، ٢٠ ، ١٢ ، ١٠ ، ٤٣

ب ٧ ، ٦ ، ١١ ، ٢ ، ١٠ ، ٦ ، ٤ ، ١٠ ، ٨ ، ٩ ، ٥ ، ١٨

الحل

أ ترتيب القيم تصاعديًا: ٧ ، ١٠ ، (١٢) ، ١٦ ، ١٧ ، (١٨) ، ٢٠ ، ٢٥ ، (٢٩) ، ٣٢ ، ٤٣

عدد القيم = ١١

ترتيب $ر_{١}$ = $\frac{١١}{٤}$ ← ٣ ، ترتيب $ر_{٣}$ = $\frac{٣}{٤}$ × ١١ = $\frac{٣٣}{٤}$ ← ٩

∴ $ر_{١}$ = ١٢ ، $ر_{٣}$ = ٢٩

لاحظ أن

ترتيب الوسيط = $\frac{٢}{٤}$ × ١١

= $\frac{٢٢}{٤}$ ← ٦

ب ترتيب القيم تصاعديًا : ٢ ، ٤ ، (٥ ، ٦) ، ٦ ، (٧ ، ٨) ، ٩ ، (١٠ ، ١٠) ، ١٧ ، ١٨ عدد القيم ١٢

ترتيب $ر_{١}$ = $\frac{١٢}{٤}$ ← ٣ وما يليه ∴ $ر_{١}$ = $\frac{٦+٥}{٢}$ = ٥,٥

ترتيب $ر_{٣}$ = $\frac{٣ \times ١٢}{٤}$ ← ٩ وما يليه ∴ $ر_{٣}$ = $\frac{١٠+١٠}{٢}$ = ١٠

ترتيب الوسيط = $\frac{٢ \times ١٢}{٤}$ ← ٦ وما يليه ∴ الوسيط = $\frac{٨+٧}{٢}$ = ٧,٥

فكر: هل يتأثر حساب الربيع بالقيم المتطرفة ؟ فسر إجابتك؟

أى مقاييس النزعة المركزية أكثر تأثيرًا بالقيم المتطرفة؟ فسر إجابتك.

حاول أن تحل

(٢) احسب الربيع الأدنى والربيع الأعلى للقيم التالية :

أ ١٤١، ٩٠، ١٣٣، ١٠٠، ١٠١، ١٢٤، ١٣٣، ٩٧، ١١٣، ١١٥، ١٤١

ب ٢٤، ١٨، ٣٩، ١٥، ١٠، ٢٨، ١٨، ٣٥، ١٦، ٢٧، ١٠، ٢١

مقاييس التشتت :

Dispersion

تهتم مقاييس التشتت لأى مجموعة من القيم بمدى التباعد أو الاختلاف بين هذه القيم فإذا كانت الفروق بين القيم كبيرة ، كان التشتت كبيرًا ، والعكس ، كما يكون التشتت صفرًا إذا تساوت جميع القيم، وقد سبق لك دراسة بعض مقاييس التشتت مثل المدى والانحراف المعيارى.

لاحظ أن

المدى =

اكبر القيم – أصغر القيم

ويتأثر كثيرًا بالقيم المتطرفة

تعلم

المدى الربيعى

Interquartile range

هو أحد مقاييس التشتت لا يتأثر بالقيم المتطرفة حيث

المدى الربيعى = الربيع الأعلى - الربيع الأدنى

$= ر_{١} - ر_{٣}$

مثال

(٣) احسب المدى الربيعى للبيانات التالية :

٣٧ ، ٤٢، ٢٥، ٣٢، ٢٣، ٢٧، ١٧، ١٠، ٤٠، ١٧

الحل

(أ) ترتيب البيانات تصاعديًا

١٠، ١٧، ١٧، ٢٣، ٢٥، ٢٧، ٣٢، ٣٧، ٤٠، ٤٢

ترتيب $س_{١}$ $= \frac{١٠}{٤}$ ← ٣ ∴ $س_{١} = ١٧$

ترتيب $س_{٣}$ $= \frac{٣ \times ١٠}{٤}$ ← ٨ ∴ $س_{٣} = ٣٧$

∵ المدى الربيعى = $س_{٣} - س_{١}$ ∴ المدى الربيعى = ٣٧ - ١٧ = ٢٠

حاول أن تحل

(٣) احسب المدى الربيعى للبيانات التالية :

٥٠ ، ٣٩ ، ٨١ ، ٩٣ ، ٥٢ ، ٧٢ ، ٦٠ ، ٥٤ ، ٤٧ ، ١٨ ، ٧٦

استنتاج الربيعات من مخطط الساق والأوراق

مثال

(٤) توضح البيانات التالية النسب المئوية لعدد من الطلاب فى إختبار الرياضيات

٦٤ ، ٨٣ ، ٦٥ ، ٧٦ ، ٨٨ ، ٩٦ ، ٨١ ، ٧٥ ، ٧٣ ، ٥٧ ، ٦١ ،

٤٢ ، ٩١ ، ٥٤ ، ٦٩ ، ٦٤ ، ٥٨ ، ٧٩ ، ٨٣ ، ٩٠ ، ٦٨

(أ) مثل هذه البيانات مخطط الساق والأوراق

(ب) استنتج من المخطط قيم $س_{١}$ ، $س_{٣}$، الوسيط

(ج) احسب المدى الربيعى لهذه البيانات

الحل

باختيار رقم العشرات لتمثيل الساق ورقم الآحاد لتمثيل الأوراق تكون وحدات الساق هى ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩.

نرتب قيم الأوراق تصاعديًا بعد تمثيلها ونكتب مفتاحًا للتمثيل وعنوانًا للمخطط

الأوراق	الساق
٢	٤
٧ ٤ ٨	٥
٤ ٥ ١ ٩ ٤ ٨	٦
٦ ٥ ٣ ٩	٧
٣ ٨ ١ ٣	٨
٦ ١ ٠	٩

النسب المئوية لدرجات الطلاب	
الأوراق	الساق
٢	٤
٤ ٧ ٨ ← $س_{١}$	٥
١ (٤) ٤ ٥ ٨ ٩	٦
الوسيط ← (٣) ٥ ٦ ٩ ← $س_{٣}$	٧
١ (٣) ٣ ٨	٨
٠ ١ ٦	٩
٤ \| ٥ = ٥٤٪	

عدد الأوراق = عدد القيم = ٢١

ترتيب $س_{١} = \frac{٢١}{٤}$ ← ٦ $س_{١} = ٦٤٪$

ترتيب $س_{٣} = \frac{٦٣}{٤}$ ← ١٦ $س_{٣} = ٨٣٪$

ترتيب الوسيط $= \frac{٤٢}{٤}$ ← ١١ الوسيط = ٧٣٪

المدى الربيعى = $س_{٣} - س_{١}$ = ٨٣ - ٦٤ = ١٩٪

حاول أن تحل

(٤) توضح البيانات التالية أطوال مجموعة من الطلاب بالسنتيمترات

١٣٣ ، ١٥٤ ، ١٥٢ ، ١٣٥ ، ١٤٢ ، ١٣٨ ، ١٤٤ ، ١٥٢ ، ١٦٣ ، ١٦٧ ، ١٤١ ، ١٥٨ ، ١٤٩ ، ١٥٩ ، ١٥٦

أ مثل هذه البيانات بطريقة الساق والأوراق ثم أستنتج الربيع الأعلى .

ب أحسب المدى الربيعى لهذه البيانات.

تطبيقات:

مثال

(٥) توضح البيانات التالية عدد الأهداف المسجلة للفريقين أ، ب فى عدد من مباريات كرة السلة :

فريق (أ) : ٦٠ ، ٥٧ ، ٦٤ ، ٦٨ ، ٧٢ ، ٥٤ ، ٦٣ ، ٥٨ ، ٥٤ ، ٦٢ ، ٥٦ ، ٧٥

فريق (ب) : ٧٤ ، ٥١ ، ٥٣ ، ٧٦ ، ٥٦ ، ٦٧ ، ٦٣ ، ٦١ ، ٦٨ ، ٥٨ ، ٦٥ ، ٥٤

قارن بين اداء الفريقين مستخدمًا مخطط الساق والأوراق

الحل

١- يمكن رسم مخطط الساق والأوراق للفريقين معًا ظهرًا لظهر ، برسم مخطط الساق والأوراق للفريق (أ) ثم اضافة أوراق مخطط الفريق (ب) إلى يسار الساق المناسب كما فى المخطط المقابل.

أوراق الفريق (أ)	الساق	أوراق الفريق (ب)
٦ ٤ ٨ ٤ ٧	٥	١ ٣ ٦ ٨ ٤
٢ ٣ ٨ ٤ ٠	٦	٧ ٣ ٦ ٨ ٥
٧ ٢	٧	٤ ٦

أوراق الفريق (أ)	الساق	أوراق الفريق (ب)
٨ ٧ ٦ ٤ ٤	٥	١ ٣ ٤ ٦ ٨
٨ ٤ ٣ ٢ ٠	٦	٣ ٥ ٦ ٧ ٨
٧ ٢	٧	٤ ٦
المفتاح ٤\|٥ =٥٤		

٢- بترتيب أوراق مخطط الساق والأوراق للفريقين نجد :

عدد المباريات = ١٢ لكل فريق

الوسيط ($ر_٢$) = متوسط قيم الورقتين ٦، ٧

الربيع الأدنى ($ر_١$) = متوسط قيم الورقتين ٣، ٤

الربيع الأعلى ($ر_٣$) = متوسط قيم الورقتين ٩، ١٠

الفريق (أ)	الفريق (ب)
الوسيط = $\frac{٦٠+٦٢}{٢}$ = ٦١	الوسيط = $\frac{٦٣+٦٥}{٢}$ = ٦٤
$ر_١$ = $\frac{٥٦+٥٧}{٢}$ = ٥٦,٥	$ر_١$ = $\frac{٥٤+٥٦}{٢}$ = ٥٥
$ر_٣$ = $\frac{٦٤+٦٨}{٢}$ = ٦٦	$ر_٣$ = $\frac{٦٧+٦٨}{٢}$ = ٦٧,٥
المدى الربيعى = $ر_٣ - ر_١$	المدى الربيعى = $ر_٣ - ر_١$
= ٦٦ - ٥٦,٥ = ٩,٥	= ٦٧,٥ - ٥٥ = ١٢,٥

لاحظ أن

المدى الربيعى للفريق أ أقل من المدى الربيعى للفريق ب أى أن بيانات الفريق أ أكثر تجانسًا.

إى أن تشتت بيانات الفريق (أ) أقل من تشتت بيانات الفريق (ب)

حاول أن تحل

(٥) بين أى البيانات التالية أقل تجانسًا مستخدمًا مخطط الساق والأوراق :

مجموعة (أ) : ١٠ ، ١٧ ، ٣١ ، ١٥ ، ١٢ ، ٢٧ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ١٨ ، ٢٨ ، ٢١ ، ٣٢

مجموعة (ب) : ٢٤ ، ٣٥ ، ١٧ ، ٢٢ ، ٢٨ ، ٢٣ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ١٠ ، ١٩ ، ٢٨ ، ٢٦

تمـــارين الدرس الثاني

اختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

(١) من مخطط الساق والأوراق المقابل:

٥|٤ = ٤٥

الساق	الأوراق
٢	١ ٣ ٦ ٧
٣	٤ ٧
٤	٥ ٨ ٩
٥	٠ ٤ ٧ ٨

الوسيط يساوى :

أ ٣٧ ب ٤١ ج ٤٨ د ٤٥

(٢) من مخطط الساق والأوراق المقابل :

٦|٨ = ٦,٨

الساق	الأوراق
٤	٧ ٩
٥	١ ١ ٣ ٣
٥	٦ ٧ ٩
٦	٠ ٠ ٢
٦	٦ ٨ ٩ ٩

الوسيط يساوى :

أ ٥,٧ ب ٥,٩ ج ٥,٨ د ٦

(٣) مثل البيانات المقابلة بمخطط الساق والأوراق ، واستنتج منه قيم الوسيط ، الربيع الأدنى ($ر_١$) الربيع الأعلى ($ر_٣$) ثم أحسب المدى الربيعى .

٤٠	٤٩	٤٤	٤٧	٤٧
٤٨	٥١	٤٦	٥٦	٥٤
٥٧	٤٣	٥٣	٥٠	٥١
٥٧	٤١	٥٣	٤٩	٥٢

(٤) يبين الجدول التالى درجات مجموعتين من الطلاب فى إختبار الرياضيات .

أ مثل هذه البيانات بمخطط الساق والأوراق ظهرًا لظهر

ب استنتج الوسيط لكل منهما وقارن بينهما.

ج مستخدمًا المدى الربيعى أى المجموعتين أكثر تجانسًا؟

مجموعة أ	٧٣	٥٩	٦٣	٩٥	٧٨	٦١	٩٩
	٨٦	٦٥	٩٨	٥٨	٧١	٥٨	٦٦
	٩٠	٧٩	٨٣	٥٦	٩٦	٦٣	
مجموعة ب	٦٥	٩١	٨٧	٩٣	٥٩	٧١	٧٢
	٥٢	٧٦	٦٤	٧٢	٩٠	٨١	٧١
	٨٤	٦٦	٥١	٧٠	٨٢	٩٠	

الدرس ٣

الاحتمال
Propability

نستخدم كلمة إحتمال كثيرًا فى حياتنا اليومية ، فنقول إحتمال فوز فريق للكرة على فريق آخر، أو إحتمال سقوط الأمطار غدًا، أو إحتمال ارتفاع أسعار سلعة معينة فى الشهر القادم .. وهكذا.

وتلعب الاحتمالات دورًا بارزًا فى نشاط البورصة وشركات التأمين وكثيرًا من القطاعات الاقتصادية كما أن علومًا كثيرة مثل علم الوراثة والطب والزراعة والعلوم الإنسانية ومنها علم النفس لها طابع احتمالى.

وتعتبر نظرية الاحتمالات إحدى فروع الرياضيات التى تهتم بدراسة الظواهر العشوائية والتى تلعب الصدفة فيها دورًا كبيرًا. ولدراسة حالة عدم التأكد لظاهرة ما نقوم ببناء نموذج رياضى للظاهرة العشوائية محل الدراسة فى إطار نظرية الاحتمالات يعرف بالنموذج الاحتمالى ومن خلاله نستطيع حساب الاحتمال.

وفيمايلى نعرض بعض المصطلحات والمفاهيم الاساسية اللازمة لفهم النموذج الاحتمالى.

مصطلحات ومفاهيم أساسية
Basic terms and concepts

تعريف ١

التجربة العشوائية
Random experiment

هى كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها ولكننا لانستطيع أن نحدد بصفة مؤكدة أيًا من هذه النواتج سيتحقق فعلًا عند إجرائها.

لاحظ:



عند إلقاء قطعة نقود ، تعرف مقدمًا أن النواتج الممكنة إما صورة أو كتابة . ولكن إذا كررنا التجربة عدة مرات تحت نفس الظروف ، هل يمكن معرفة ناتج كل محاولة قبل وقوعها؟

فى الحقيقة إذا كانت قطعة النقود متوازنة (منتظمة) فإننا لانستطيع ذلك، ولهذا نقول على هذه التجربة أنها تجربة عشوائية.

مثال

١ بين أى التجارب التالية تجربة عشوائية



أ كيس به كرات سوداء وكرات بيضاء وأردنا سحب كرة واحدة منه وملاحظة لونها وكان ملمس الكرات البيضاء مختلف عن ملمس الكرات السوداء

سوف تتعلم

- مفهوم التجربة العشوائية وفضاء العينة .
- كتابة فضاء العينة لبعض التجارب العشوائية الشهيرة (القاء قطعة نقود – القاء حجر نرد).
- مفهوم الحدث – الحدث البسيط – الحدث المؤكد – الحدث المستحيل – الأحداث المتنافية
- العمليات على الأحداث والتعبير عنها لفظيآ ورمزيًا.
- توظيف مسلمات الاحتمال فى إيجاد احتمالات وقوع أحداث معينة وتطبيقات حياتية

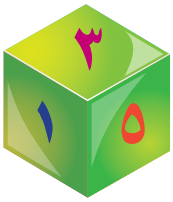
المصطلحاتُ الأساسيّةُ

- تجربة عشوائية random experiment
- فضاء العينة sample space
- حدث event
- حدث بسيط simple event
- حدث مؤكد certain event
- حدث مستحيل impossible event
- احداث متنافية mutually exclusive events

الأدوات والوسائل

آلة حاسبة .

ب القاء حجر نرد منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى.



الحل

التجربة (أ): ليست تجربة عشوائية لأن ملمس الكرات البيضاء مختلف عن ملمس الكرات السوداء، فيستطيع الشخص الذى يسحب الكرة أن يسحب من الكيس اللون الذى يريده وبالتالى فهو يتحكم فى نواتج التجربة قبل وقوعها.

التجربة (ب): تجربة عشوائية لأن جميع النواتج معروفة مقدمًا وهى من ١ إلى ٦ ولكن لايمكن أن نتنبأ بصفة مؤكدة أى هذه النواتج سوف تحدث عند القاء حجر النرد.

فكر: هل تجربة سحب بطاقة واحدة من حقيبة بها ٢٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٢٠ وملاحظة العدد الذى يظهر علي البطاقة المسحوبة ، هى تجربة عشوائية ؟ فسر إجابتك.

لاحظ أن

فى التجربة العشوائية يمكنك توقع النواتج التى ستحدث ، ولكن لاتعرف أيًا منها سيقع فعلاً . وبعد إتمام التجربة ترى أن ناتجًا واحدًا فقط قد تم حدوثه من بين هذه النواتج.

تعلم

تعريف ٢

فضاء العينة (فضاء النواتج) : *Sample space (outcomes space)*

➢ فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة و يرمز له بالرمز ف

ملاحظة:

➢ يرمز لعدد عناصر فضاء العينة ف بالرمز ن (ف) .

➢ يكون فضاء العينة منتهيًا إذا كان عدد عناصره محدودًا، أو غير منته إذا كان عدد عناصره غير محدود ، وسندرس فقط فضاء النواتج المنته.

تجارب عشوائية شهيرة :

أولاً: إلقاء قطعة نقود : *Tossing a coin*

١- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة

وملاحظة الوجه الظاهر هو: ف = { ص، ك}

حيث ص ترمز للصورة ، ك ترمز للكتابة

ويكون : ن(ص) = ٢

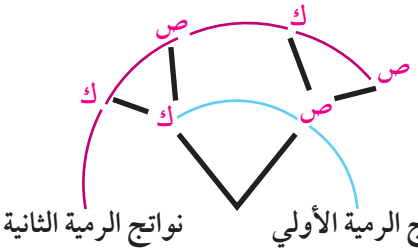


٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين

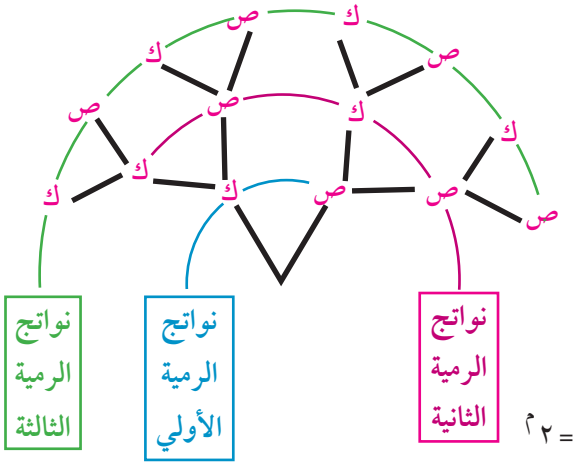
وملاحظة تتابع الصور والكتابات هو:

ف = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

ويكون : ن (ف) = ٢ × ٢ = ٤ = $٢^{٢}$



٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات (يمكن الحصول عليه من الشجرة البيانية (المقابلة) هو:



ف = { (ص ، ص، ص) ، (ص، ص، ك) ،
(ص، ك ، ص) ، (ص ، ك، ك) ،
(ك ، ص، ص) ، (ك ، ص، ك) ،
(ك ، ك ، ص) ، (ك ، ك ، ك)}

ويكون : ن(ف) = ٢ × ٢ × ٢ = ٨ = $٢^{٣}$

لاحظ

١- عند رمى قطعة نقود م من المرات المتتالية يكون ن (ف) = $٢^{م}$

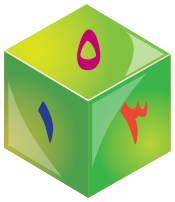
٢- (ص، ك) ≠ (ك، ص) لماذا؟

٣- فضاء العينة لتجربة القاء قطعتى نقود متمايزتين (مختلفتين فى الشكل أو الحجم) معًا (فى آن واحد) هو نفس فضاء العينة عند إلقاء قطعة نقود واحدة مرتين متتاليتين ويكون كل ناتج من نواتج التجربة على الشكل الزوج المرتب: (وجه القطعة الأولى ، وجه القطعة الثانية).



ثانيًا : إلقاء حجر نرد :

Tossing a die



١- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى هو :

ف = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ } ويكون : ن (ف) = ٦

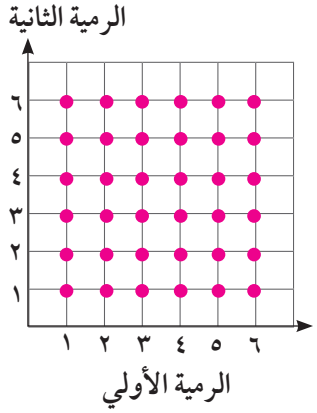
٢- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر فى كل مرة على الوجه العلوى هو مجموعة الأزواج المرتبة التى مسقطها الأول هو ناتج الرمية الأولى ومسقطها الثانى هو ناتج الرمية الثانية أى أن:

ف = { (س، ص) : س = ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ص = ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} والاشكال التالية توضح ذلك .

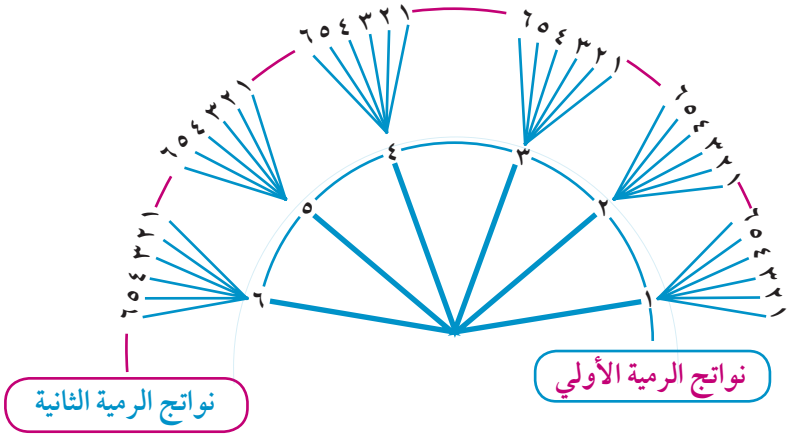
أ صورة جدولية :

الرمية الأولى / الرمية الثانية	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١،١)	(١،٢)	(١،٣)	(١،٤)	(١،٥)	(١،٦)
٢	(٢،١)	(٢،٢)	(٢،٣)	(٢،٤)	(٢،٥)	(٢،٦)
٣	(٣،١)	(٣،٢)	(٣،٣)	(٣،٤)	(٣،٥)	(٣،٦)
٤	(٤،١)	(٤،٢)	(٤،٣)	(٤،٤)	(٤،٥)	(٤،٦)
٥	(٥،١)	(٥،٢)	(٥،٣)	(٥،٤)	(٥،٥)	(٥،٦)
٦	(٦،١)	(٦،٢)	(٦،٣)	(٦،٤)	(٦،٥)	(٦،٦)

ب صورة هندسية :



جـ الشجرة البيانية



لاحظ أن :

١- ن (ف) = ٦ × ٦ = ٣٦ = $٦^{٢}$

٢- ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} × { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

٣- فضاء العينة لتجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين فى آن واحد (معًا) هو نفس فضاء العينة لتجربة إلقاء حجر نرد واحد مرتين متتاليتين.



مثال

(٢) فى تجربة إلقاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة مايظهر على وجهيهما العلويين ، أذكر عدد النواتج الممكنة واكتب فضاء العينة.

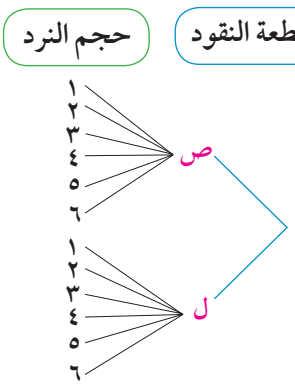
الحل

من الشجرة البيانية المقابلة نلاحظ أن كل ناتج من نواتج القاء قطعة النقود يمكن أن يقترن بأى عدد من الأعداد الستة التى تظهر على الوجه العلوى لحجر النرد

∴ ن (ف) = ٢ × ٦ = ١٢

ف = { ص، ك} × { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

= { (ص، ١) ، (ص، ٢) ، (ص، ٣) ، (ص، ٤) ، (ص، ٥) ، (ص، ٦) ، (ك، ١) ، (ك، ٢) ، (ك، ٣) ، (ك، ٤) ، (ك، ٥) ، (ك، ٦) }



فكر: هل يمكن تمثيل ف بطريقة هندسية ؟ وضح إجابتك بالرسم .

إذا ألقى حجر النرد أولاً ثم قطعة النقود ، هل يتغير عدد النواتج الممكنة ؟ هل يتغير فضاء العينة ؟ فسر إجابتك .

حاول أن تحل

(١) قرر باسم القيام برحلة من القاهرة إلى أسوان فى إجازة نصف العام لمشاهدة آثار مصر الفرعونية على مرحلتين (القاهرة - الأقصر ، الأقصر - أسوان) فإذا كانت وسائل المواصلات المتاحة فى كل مرحلة هى القطار أو السيارة أو الطائرة ، فاكتب فضاء العينة المرتبط بوسائل المواصلات لهذه الرحلة.

مثال

(٣) كيس به ثلاث كرات متماثلة إلا من حيث اللون: الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة صفراء . اكتب فضاء العينة فى الحالات الآتية :

أولاً: إذا سحبت كرتين الواحدة بعد الآخرى مع إعادة الكرة المسحوبة قبل سحب الكرة الثانية (مع الإحلال) وملاحظة تتابع الألوان.

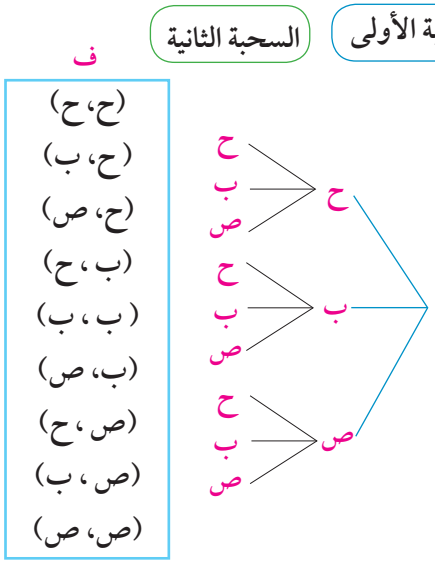
ثانيًا: إذا سحبت كرتين الواحدة بعد الأخرى بدون إحلال وملاحظة تتابع الألوان .

الحل

نرمز إلى الكرة الحمراء بالرمز (ح) والكرة البيضاء بالرمز (ب) والكرة الصفراء بالرمز (ص):

أولاً: عندما تعاد الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحبة الثانية تصبح كل كرة من الكرات الثلاث لها فرصة الظهور فى السحبة الثانية ويصبح من الممكن أن تسحب نفس الكرة مرة ثانية و يوضح الشكل المقابل الشجرة البيانية لفضاء العينة حيث ن (ف) = $٣^{٢}$ = ٩

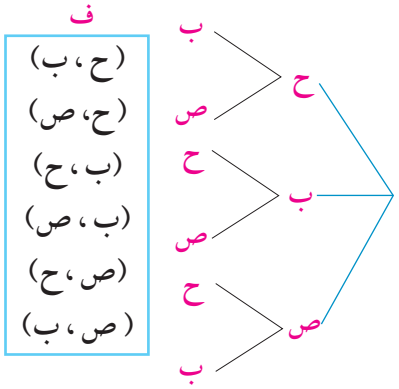
ف = { (ح، ح) ، (ح، ب) ، (ح، ص) ، (ب ، ح) ، (ب ، ب) ، (ب، ص) ، (ص ، ح) ، (ص ، ب) ، (ص، ص) }



ثانيًا: يقصد بعبارة (دون إحلال) عدم إعادة الكرة إلى الكيس بعد سحبها وبذلك لن يكون هناك فرصة لظهورها فى السحبة الثانية

∴ ن (ف) = ٣ × ٢ = ٦

ف = {(ح ، ب) ، (ح، ص) ، (ب ، ح) ، (ب ، ص) ، (ص ، ح) ، (ص ، ب) }



حاول أن تحل

(٢) صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣ سحبت كرتين الواحدة بعد الأخرى مع الإحلال وملاحظة رقم الكرة . اكتب فضاء العينة وبين عدد عناصره.

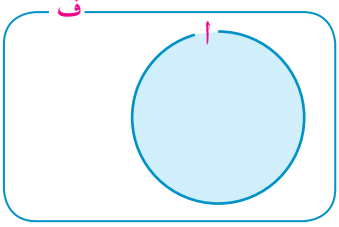
تعريف ١

الحدث *The event*

➢ الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

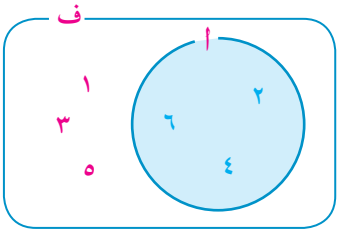
لاحظ :

١- حيث أن الأحداث هى مجموعات جزئية من فضاء العينة ف، لذلك نرمز للأحداث بالحروف الكبيرة أ ، ب ، ج ، ... كما يمكن تمثيلها باشكال ڤن venn diagram



٢- إذا كان أ حدثًا لتجربة عشوائية ، ف فضاء العينة لها فإن : أ ⊂ ف ، وباعتبار ف المجموعة الشاملة نستطيع التعبير عن الحدث أ بشكل ڤن المجاور .

٣- نقول أن حدثًا ما قد وقع (تحقق) إذا كان ناتج التجربة العشوائية عنصرًا من عناصر المجموعة التى تعبر عن هذا الحدث.



فمثلاً عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى نجد أن : ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

فتكون المجموعة أ = {٢، ٤، ٦} وهى مجموعة جزئية من ف تعبر عن حدث " ظهور عدد زوجى " ونقول أن الحدث أ قد وقع (تحقق) إذا ظهرت أى الأعداد ٢ أو ٤ أو ٦ عند إجراء التجربة.

مثال

(٤) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى .

(أ) اكتب فضاء العينة ثم عين الأحداث الآتية و إذكر عدد عناصر كل منها

الحدث أ " ظهور عدد اكبر من ٥" ، الحدث ب " ظهور عدد أولى "

الحدث ج " ظهور عدد أصغر من ٩" ، الحدث د " ظهور عدد يقبل القسمة على ٤"

الحدث هـ" ظهور عدد يقبل القسمة على ٧"

(ب) إذا ظهر العدد ٣ على الوجه العلوى عند إجراء التجربة ، فأى الاحداث السابقة يكون قد وقع ؟

الحل

(أ) ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ويكون

الحدث أ " ظهور عدد اكبر من ٥" ∴ أ = {٦} ، ن (أ) = ١

الحدث ب " ظهور عدد أولى " ∴ ب = {٢، ٣، ٥} ، ن (ب) = ٣

الحدث ج " ظهور عدد أصغر من ٩ ∴ ج = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} = ف ، ن (ج) = ٦

الحدث د " ظهور عدد يقبل القسمة على ٤" ∴ د = {٤} ، ن (د) = ١

الحدث هـ " ظهور عدد يقبل القسمة على ٧"

لايوجد أى ناتج من نواتج التجربة (فضاء العينة) يقبل القسمة على ٧

∴ هـ = { } = ϕ (المجموعة الخالية) ، ن(هـ) = صفر

(ب) عند ظهور العدد ٣ كناتج للتجربة نقول أن كل من الحدثين ب ، ج قد وقع لأن ٣ ∈ ب ، ٣ ∈ ج

حاول أن تحل

(٣) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى، اكتب فضاء النواتج ثم عين الاحداث التالية واذكر عدد عناصر كل منها.

الحدث أ " ظهور عدد يقبل القسمة على ٣"

الحدث ب " ظهور عدد يحقق المتباينة س ⩾ ٤"

الحدث ج" ظهور عدد يحقق المعادلة س (س-٢) + ١٥ = ٠"

تعريف ٤

الحدث البسيط (الحدث الأولى) *The simple event*

➢ هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحتوى عنصرًا واحدًا فقط.

فى مثال ٤: الحدثان أ ، د كل منهما حدث بسيط (أولى) ، أما الحدثان ب ، ج فكل منهما لايعتبر حدثًابسيطًا لاحتواء الحدث على اكثر من عنصر من عناصر ف ويسمى عندئذ بالحدث المركب compound event

نعلم من دراستنا للمجموعات أن المجموعة ف والمجموعة الخالية ϕ هما مجموعتان جزئيتان من المجموعة ف ، ومن ثم فإن ف، ϕ هما حدثان من فضاء العينة ف.

تعريف ٥

الحدث المؤكد : *The certain event*

هو الحدث الذى عناصره هى عناصر فضاء العينة ف

الحدث المستحيل *The impossible event*

هو الحدث الخالى من أى عنصر ويرمز له بالرمز ϕ

فى مثال (٤) الحدث ج هو حدث مؤكد أما الحدث هـ فهو حدث مستحيل

حاول أن تحل

(٤) صندوق به ٩ بطاقات متماثلة مرقمة من ١ إلى ٩ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المسجل علي هذه البطاقة . عين كل من الاحداث التالية مع وصفها (حدث مؤكد - حدث مستحيل - حدث بسيط - حدث مركب)

الحدث أ" ظهور عدد زوجى "

الحدث ب " ظهور عدد أولى "

الحدث ج" ظهور عدد اكبر من ٨"

الحدث د" ظهور عدد يقبل القسمة على ٧"

الحدث هـ" ظهور عدد يقبل القسمة على ١١"

الحدث و" ظهور عدد مربع كامل "

الحدث ز" ظهور عدد يحقق المعادلة $س^{٢} - ٧ س = ٦٠$ "

الحدث ع " ظهور عدد يحقق المتباينة $٢ س - ٣ \geqslant ١٥$"

فكر: هل يمكن تعين مجموعة جزئية من عناصر ف تحقق

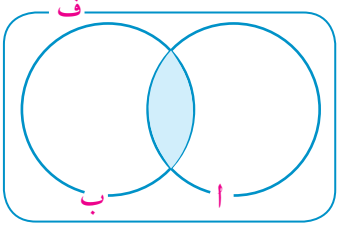
١- وقوع الجدثين أ ، و معًا ؟ ٢- وقوع الحدث ج أو د؟ فسر إجابتك

لاحظ: عند الربط بين حدثين أو أكثر نحصل على أحداث جديدة تعرف بالأحداث المركبة و يمكن التعبير عنها لفظيًا أو رمزيًا كما يمكن تمثيلها بأشكال ڤن.

العمليات على الأحداث

Operation of the events

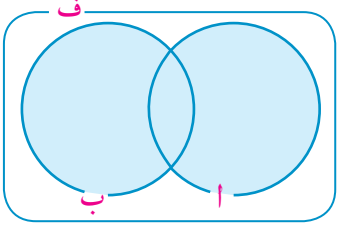
نظرًا لأن الأحداث هى مجموعات جزيئة من فضاء العينة ، لذا فإن العمليات على الاحداث هى نفس العمليات على المجموعات مثل الاتحاد والتقاطع والفرق والاكمال وباعتبار فضاء العينة ف المجموعة الشاملة نستطيع التعبير عن الحدثين أ، ب من ف والعمليات عليها لفظيًا ورمزيًا وتمثيلها بأشكال ڤن كمايلى :



ا ∩ ب

أولاً: التقاطع

تقاطع الحدثين أ ، ب هو الحدث أ ∩ ب الذى يحوى كل عناصر فضاء العينة التى تنتمى إلى أ، ب معًا و يعنى **وقوع أ و ب (وقوع الحدثين معًا)**

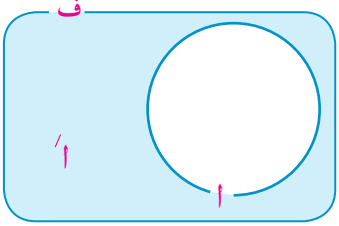


ا ∪ ب

ثانيًا : الاتحاد :

إتحاد الحدثين أ ، ب هو الحدث أ ∪ب الذى يحوى كل عناصر فضاء العينة التى تنتمى إلى أ أو ب أو كليهما معًا و يعنى **وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)**

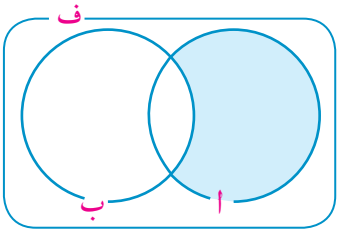
ثالثًا : الاكمال



الحدث أ′ يسمى الحدث المكمل للحدث أ ، إذا كان أ′ يحوى كل عناصر فضاء العينة التى لاتنتمى إلى الحدث أ ، و يعنى **عدم وقوع الحدث أ** .

لاحظ : ا ∪ أ′ = ف ، ا ∩ أ′ = ϕ

رابعًا: الفرق



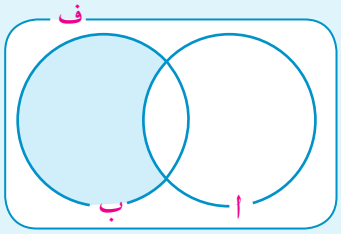
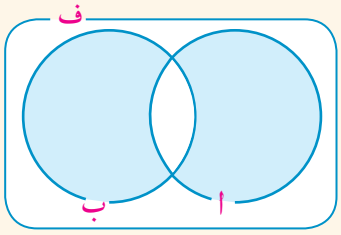
ا - ب = ا ∩ ب′ = ا - (ا ∩ ب)

الحدث أ - ب يحوى كل عناصر فضاء العينة التى تنتمى إلى أ ولا تنتمى إلى ب وهى أيضًا نفس عناصر أ ∩ ب′

و يعنى **وقوع أ وعدم وقوع ب (وقوع أ فقط)**

تعبير شفهى :

إذا كان أ، ب حدثان من فضاء العينة ف ، أكمل الجدول وظلل تمثيل الحدث :

التعبير عن الحدث لفظيًا	التعبير عن الحدث رمزيًا	تمثيل الحدث
وقوع الحدث ب فقط (وقوع ب وعدم وقوع أ)		
وقوع أحدهما فقط (وقوع أ فقط أو وقوع ب فقط)		

مثال

(٥) ثماني بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٨ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المسجل على هذه البطاقة اكتب فضاء العينة ثم عين كل من الاحداث الآتية :

أ الحدث أ " ظهور عدد فردى"

ب الحدث ب " ظهور عدد أولى "

ج حدث وقوع أ و ب معًا

د حدث وقوع أحدهما على الأقل.

هـ حدث عدم وقوع أ

و حدث وقوع أ فقط.

ز حدث وقوع ب فقط

ح حدث وقوع احدهما على الاكثر .

الحل

ف = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨}

أ ∵ الحدث أ" ظهور عدد فردى"

∴ أ = { ١ ، ٣، ٥، ٧}

ب ∵ الحدث ب " ظهور عدد أولى " ∴ ب = { ٢، ٣، ٥، ٧}

ج وقوع أ وب معًا = أ ∩ ب = { ٣، ٥، ٧}

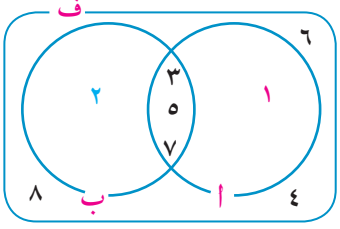
د حدث وقوع أحدهما على الأقل = أ ∪ ب = { ١، ٢، ٣، ٥، ٧}

هـ حدث عدم وقوع أ = أَ = { ٢، ٤، ٦، ٨}

و حدث وقوع أ فقط = أ - ب = {١}

ز حدث وقوع ب فقط = ب - أ = {٢}

ح حدث وقوع أحدهما فقط = (أ - ب) ∪ (ب - أ) = {١، ٢}



حاول أن تحل

(٥) سجلت أرقام العدد ٩٥٧٤٣٨٦٢ فى بطاقات صغيرة متماثلة . سحبت احداها عشوائيًا ولوحظ العدد المسجل بالبطاقة ، اكتب فضاء العينة لهذه التجربة ثم عين كل من الاحداث التالية:

أ الحدث أ " العدد الظاهر عددًا فرديًا "

ب الحدث ب " العدد الظاهر يقبل القسمة على ٣"

جـ حدث وقوع أ و ب

د حدث وقوع ب فقط.

هـ وقوع أحد الحدثين فقط.

و وقوع أحد الحدثين على الأقل.

تفكير ناقد :

إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة ف ، عبر عن الاحداث التالية بلغة المجموعات ومثل كل منها بشكل ڤن .

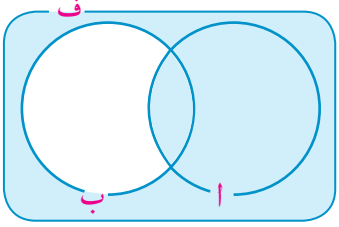
أ وقوع أ أو عدم وقوع ب

ب عدم وقوع أ وعدم وقوع ب

جـ عدم وقوع الحدثين معًا

د وقوع أحد الحدثين على الأكثر.

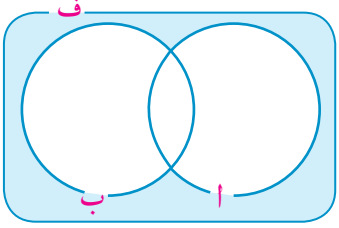
لاحظ أن:



أ حدث وقوع أ = أ ، حدث عدم وقوع ب = ب′

∴ الحدث المطلوب = أ ∪ ب′ = عدم وقوع ب فقط

أى أن : **عدم وقوع ب فقط هو نفسه عدم وقوع ب أو وقوع أ**

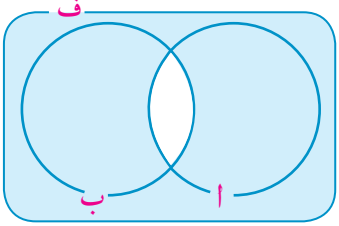


ب عدم وقوع أ = أ′ ، عدم وقوع ب = ب′

∴ الحدث المطلوب = أ′ ∩ ب′ = (أ ∪ ب)′

= عدم وقوع أى من الحدثين

أى أن : **عدم وقوع أى من الحدثين هو نفسه عدم وقوع أ وعدم وقوع ب .**



جـ عدم وقوع الحدثين معًا = (أ ∩ ب)′ = أ′ ∪ ب′

= عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب

أى أن : **عدم وقوع الحدثين معًا هو نفسه عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب**

د وقوع أحد الحدثين على الأكثر = عدم وقوع الحدثين معًا = (أ ∩ ب)′

أى أن : **عدم وقوع الحدثين معًا = عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب = وقوع أحد الحدثين على الأكثر**

حاول أن تحل

(٦) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة ف ، عبر عن الأحداث التالية بلغة المجموعات ومثل كل منها بشكل ڤن.

أ عدم وقوع أ ووقوع ب

ب وقوع أ وعدم وقوع ب

الاحداث المتنافية

Mutually exclusive events

يقال لحدثين أ ، ب أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر

فمثلاً: ١- إذا كان أ" حدث النجاح فى امتحان ما" ، ب" حدث الرسوب فى نفس الامتحان" فإن وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر.

٢- فى تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى فإن

ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

إذا كان أ حدث ظهور عدد فردى أى : أ = { ١ ، ٣ ، ٥}

ب حدث ظهور عدد زوجى أى : ب = { ٣ ، ٤ ، ٦}

فإن أ ∩ ب = ϕ أى وقوع أحدهما ينفى وقوع الآخر .

تعريف ٢

- يقال أن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا كان أ ∩ ب = ϕ
- يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى

لاحظ :

١- إذا كان أ ∩ ب = ϕ فإن أ ، ب حدثان متنافيان

و إذا كانت أ ، ب ، ج ثلاثة أحداث من ف وكان : أ ∩ ب = ϕ ، ب ∩ ج = ϕ ، ج ∩ أ = ϕ

فإن: أ ، ب، ج إحداث متنافية والعكس صحيح.

٢- الاحداث البسيطة (الأولية) فى أى تجربة عشوائية تكون متنافية.

٣- أى حدث أ ومكمله أ' هما حدثان متنافيان.

مثال

(٦) فى تجربة إلقاء حجرى نرد متمايزين وملاحظة العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لها.

أولاً: مثل فضاء العينة هندسيًا واكتب كلاً من احدثين الآتيين.

الحدث أ " ظهور نفس العدد على الوجهين" الحدث ب " ظهور عددين مجموعهما ٧".

ثانيًا : هل الحدثان أ ، ب متنافيان ؟ فسر إجابتك .

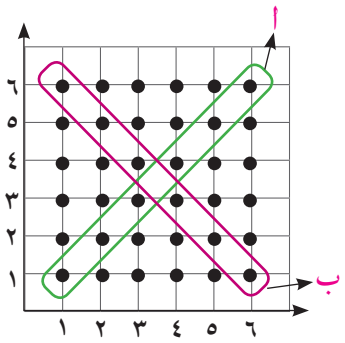
الحل

أولاً : عناصر فضاء العينة لهذه التجربة هى أزواج مرتبة عددها = $٦^{٢}$ = ٣٦

الشكل المقابل هو التمثيل الهندسى لفضاء العينة حيث كل عنصر من عناصر فضاء العينة يمثل بنقطة كما فى الشكل .

أ = {(١ ، ١)، (٢ ، ٢)، (٣ ، ٣)، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

ب = { (٦ ، ١) ، (٥ ، ٢)، (٤ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (١ ، ٦) }



ثانيًا: ∵ أ ∩ ب = ϕ ∴ أ ، ب حدثان متنافيان

حاول أن تحل

(٧) فى مباريات الدورى العام لكرة القدم يحصل الفريق الفائز على ٣ نقاط والمتعادل على نقطة واحدة والفريق المهزوم لايحصل على أى نقطة ، فإذا لعب الفريق مباراتين متتاليتين اكتب فضاء العينة لما يحصل عليه الفريق من نقط ثم أوجد كلاً من الأحداث الآتية :

أ حدث حصول الفريق على اكثر من ٤ نقط.
ب حدث عدم هزيمة الفريق
جـ حدث وقوع أ و ب
د حدث وقوع أ أو ب
هـ حدث وقوع أ فقط.
و حدث عدم وقوع ب فقط.

الاحتمال *Probability*

تعين نظرية الاحتمالات لكل حدث من أحداث التجربة العشوائية عددًا حقيقيًا يسمى احتمال الحدث، وهو العدد الحقيقى الذى يعبر عن إمكانية وقوع الحدث و يتوقف حسابه على النسبة بين عدد عناصر الحدث إلى عدد عناصر فضاء العينة .

فإذا كان أ حدث من ف أى أ ⊂ ف ، عدد عناصر أ = ن (أ) ، عدد عناصر ف = ن(ف) .

ورمزنا لاحتمال وقوع الحدث أ بالرمز ل (أ)

فإن : $ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)}$

لاحظ :

١- ل دالة حقيقية مجالها مجموعة أحداث التجربة العشوائية، وتعرف بدالة الاحتمال

٢- أ ⊂ ف ∴ ٠ ≤ ن (أ) ≤ ن (ف) ويكون ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١

٣- $ل(ف) = \frac{ن(ف)}{ن(ف)} = ١$ (إحتمال وقوع الحدث المؤكد)

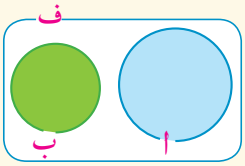
تعلم

مسلمات الاحتمال *Axioms of probability*

١- لكل حدث أ ⊂ ف يوجد عدد حقيقى يسمى إحتمال الحدث أ يرمز له بالرمز ل(أ)
حيث : ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١

٢- ل (ف) = ١

٣- إذا كان أ ⊂ ف، ب ⊂ ف



وكان أ ، ب حدثين متنافيين فإن : ل (أ ∪ ب) = ل(أ) + ل (ب)

تسمى المسلمة (٣) بقاعدة الجمع لإحتمالات الأحداث المتنافية وتعمم لأى عدد منته من الأحداث المتنافية.

ل (أ ∪ ب ∪ ج ∪ د ∪) = ل (أ) + ل (ب) + ل (ج) + ل (د) حيث أ ، ب، جـ ، ء أحداث متنافية مثنى مثنى

أى أن : احتمال **(اتحاد الاحداث المتنافية)** = **مجموع احتمالاتها** .

مثال

(٧) صندوق به ٩ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٩ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المدون عليها.

أوجد احتمال كل من الأحداث التالية :

أ هو حدث ظهور عدد أصغر من ٣ ب هو حدث ظهور عدد أكبر من ٥

ج هو حدث ظهور عدد مضاعف للعدد ٣ ، د حدث وقوع أ أو ب

الحل

ف = { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩} ، ن (ف) = ٩

أ = { ١، ٢} ، ن (أ) = ٢ ∴ ل (أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٢}{٩}$

ب = { ٦، ٧، ٨، ٩} ، ن (ب) = ٤ ∴ ل (ب) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٤}{٩}$

ج = { ٣، ٦، ٩} ، ن (ج) = ٣ ∴ ل (ج) = $\frac{٣}{٩}$ = $\frac{١}{٣}$

لإيجاد ل (د) لاحظ أن أ ، ب حدثان متنافيان لأن أ ∩ ب = ϕ

∴ احتمال وقوع أ أو ب = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) مسلمة (٣)

= $\frac{٢}{٩}$ + $\frac{٤}{٩}$ = $\frac{٦}{٩}$ = $\frac{١}{٢}$

فكر:

هل أ، ب ، ج أحداث متنافية مثنى مثنى ؟ فسر إجابتك ، و إحسب احتمال وقوع أ أو ج .

مسترشدا بحل مثال ٦ تحقق من صحة النتائج التالية :

نتائج هامة :

١ - احتمال وقوع أى حدث = مجموع احتمالات الاحداث الأولية لهذا الحدث.

٢ - مجموع إحتمالات وقوع جميع الأحداث الأولية لفضاء العينة = ١

مثال

(٨) إذا كان ف = { أ، ب، ج، د} فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان ل دالة إحتمال لهذه التجربة أوجد :

أ ل(د) إذا كان ل(أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب) = ل (ج) = $\frac{١}{٨}$

ب ل (د) إذا كان ل (أ) = ل (ب ∪ ج) = $\frac{٣}{٨}$

الحل

أ ∵ أ ، ب، ج ، د هى جميع الأحداث الأولية لهذه التجربة

∴ ل (ف) = ل(أ) + (ب) + ل (ج) + ل (د) = ١ نتيجة (٢)

ويكون : $\frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{٨}$ + ل (د) = ١ ∴ ل (د) = ١ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

ب ∵ ل (ب ∪ ج) = $\frac{٣}{٨}$ = ل (ب) + ل (ج) نتيجة (١)

، ل (ف) = ل (أ) + ل (ب) + ل (ج) + ل (د) = ١ نتيجة (٢)

فيكون : ١ = $\frac{٣}{٨}$ + $\frac{٣}{٨}$ + ل (د) ∴ ل (د) = ١ - $\frac{٦}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$

حاول أن تحل

(٨) إذا كان ف = { أ ، ب ، ج } فضاء العينة لتجربة عشوائية ، ل دالة إحتمال لهذه التجربة . أوجد :

أ ل (أ) إذا كان ل (ب) = ٢ ل (أ) ، ل (ج) = $\frac{١}{٤}$

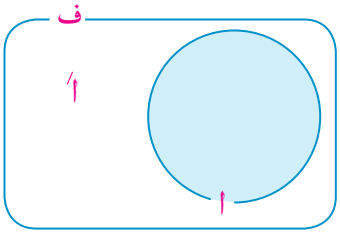
ب ل (أ) ، ل (ب) إذا كان ل (ج) = $\frac{١}{٦}$ ، ٢ ل (أ) = ٣ ل (ب)

خواص دالة الاحتمال

١ - احتمال وقوع الحدث المستحيل = صفر أى أن ل (ϕ) = ٠

٢ - احتمال وقوع الحدث أَ المكمل للحدث أ بالنسبة إلى ف

هو : ل(أَ) = ١ - ل (أ)

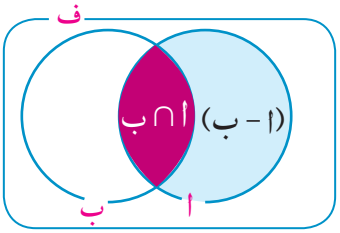


(لاحظ أن أ، أَ حدثان متنافيان)

٣ - احتمال الفرق بين حدثين من فضاء العينة

إذا كان أ ⊃ ف، ب ⊃ ف

فإن ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)



(أ - ب) ، أ ∩ ب حدثان متنافيان

ل (أ) = ل (أ - ب) + ل (أ ∩ ب)

تفكير ناقد :

أ اكتب مايساويه ل (ب - أ)

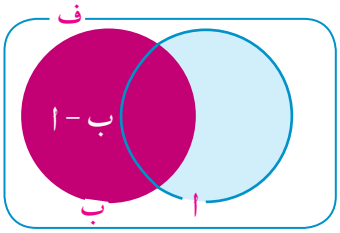
ب إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين ، فاكتب ما يساويه كل من

ل (أ - ب)، ل (ب - أ)

٤ - قاعدة الجمع لأى حدثين من فضاء العينة

إذا كان أ ⊃ ف، ب ⊃ ف

فإن ل ((أ ∪ ب) = ل (أ) + ل(ب) - ل (أ ∩ ب)



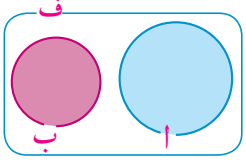
أ ، ب - أ حدثان متنافيان

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب - أ)

مثال

(٩) أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ل دالة احتمال معرفة على ف، حيث :
ل (ب) = ٣ ل (أ) ، ل (أ ∪ ب)= ٠,٧٢ أوجد ل (أ) ، ل (ب)

أولاً: إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان **ثانيًا:** إذا كان أ ⊃ ب



الحل

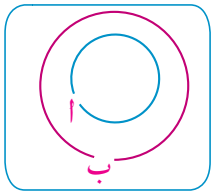
بفرض أن ل (أ) = س ∴ ل (ب) = ٣ س

أولاً: ∵ أ ، ب حدثان متنافيان

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) فيكون : ٠,٧٢ = ٣ س + س

∴ س = ٠,١٨ ، ل (أ) = ٠,١٨ ، ل (ب) = ٠,٥٤

ثانيًا: ∵ أ ⊃ ب ∴ أ ∪ ب = ب



ل (أ ∪ ب) = ل (ب) = ٣س = ٠,٧٢

∴ ل (أ) = ٠,٢٤ ، ل (ب) = ٠,٧٢

حاول أن تحل

(٩) أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ل دالة إحتمال معرفة على ف ، حيث :
ل(ب) = $\frac{١}{٢٥}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ أوجد ل (أ)

أولاً: إذا كان أ ، ب حدثان متنافيان **ثانيًا:** إذا كان ب ⊃ أ

تفكير ناقد:

بين كيف يمكن حساب ل (أ) إذا كان أ ⊃ ف ، ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ،

ل دالة إحتمال معرفة على ف إذا كان: $\frac{\text{ل (أ)}}{\text{ل (أ)}} = \frac{٣}{٧}$

حاول أن تحل

(١٠) إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية حيث ف = { أ ، ب ، ج} ، ل دالة احتمال معرفة على ف ،
وكان $\frac{\text{ل (أ)}}{\text{ل (أ)}} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{ل (ب)}}{\text{ل (ب)}} = \frac{٥}{٢}$ ، أوجد ل(ج)

مثال

(١٠) إذا كان إحتمال نجاح طالب فى امتحان الفيزياء يساوى ٠,٨٥ ، و إحتمال نجاحه فى امتحان الرياضيات ٠,٩
و إحتمال نجاحه فى الامتحانين معًا ٠,٨ أوجد احتمال :

أ نجاح الطالب فى أحد الامتحانين على الأقل. ب نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات فقط.

جـ عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معًا.

الحل

ليكن أ حدث نجاح الطالب فى امتحان الفيزياء ، ب حدث نجاح الطالب فى الرياضيات
فيكون : ل (أ) = ٠,٨٥ ، ل (ب) = ٠,٩ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٨

أ احتمال نجاح الطالب فى احد الامتحانين على الأقل = ل (أ ∪ ب)
∴ (أ ∪ ب)= ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = ٠,٨٥ + ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,٩٥

ب احتمال نجاح الطالب فى امتحان الرياضيات فقط يعنى احتمال نجاحه فى امتحان الرياضيات وعدم نجاحه فى امتحان الفيزياء أى ل (ب - أ)
∴ ل (ب- أ) = ل (ب) - ل (ب ∩ أ) = ٠,٩ - ٠,٨ = ٠,١

ج حدث عدم نجاح الطالب فى الامتحانين معًا = (أ ∩ ب)′ وهو حدث مكمل للحدث (أ ∩ ب)
∴ ل(أ ∩ ب)′ = ١ - ل (أ ∩ ب) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

٩ حاول أن تحل

(١١) للحصول على وظيفة فى إحدى الشركات يتقدم الشخص لاختبارين ، أحدهما نظرى والآخر عملى، إذا كان احتمال النجاح فى الاختبار النظرى ٠,٧٥ والاختبار العملى ٠,٦ واحتمال النجاح فى الاختبارين معًا ٠,٥ فإذا تقدم شخص ما للحصول على هذه الوظيفة لأول مرة أوجد احتمال :

أ نجاحه فى الاختبار النظرى فقط ب نجاحه فى أحد الاختبارين على الأقل

تفكير ناقد:

صرح مدرب أحد الفرق الرياضية أثناء لقاء صحفى معه بأن إحتمال فوز فريقه فى مباراة الذهاب (٠,٧) ، واحتمال فوز فريقه فى مباراة الإياب (٠,٩) ، وأن إحتمال فوزه فى المباراتين معًا (٠,٥) هل يتفق ما صرح به مدرب الفريق مع مفهوم الاحتمال ؟ فسر إجابتك.

دالة الاحتمال المنتظم

إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، فإن الدالة ل تسمى دالة إحتمال منتظم إذا كان وفقط إذا كان جميع الأحداث الأولية متساوية الإمكانات (إحتمالات الوقوع).

أى أن : إذا كانت ف = { و١، و٢، و٣ ، وﻥ} ، وكان ل (و١) = ل (و٢) = ل (و٣) = ... = ل (وﻥ) ، فإن ل دالة إحتمال منتظم

لاحظ أن :

١- ل (و١) = ل (و٢) = ل(و٣) = ... = ل (وﻥ) = $\frac{١}{ن}$

٢- إذا كان أ ⊂ ف ، أ= { و١، و٢، و٣، وﻡ}

فإن ل (أ) = ل (و١) + ل (و٢) + ل(و٣) + ... + ل(وﻡ) = $\frac{م}{ن}$ (م عدد عناصر العدد أ)

أى أن: ل (أ) = $\frac{\text{عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$

٣- فى أى تجربة عشوائية تعتمد على إختيار عنصر من مجموعة بها عدد محدود من العناصر فإن عملية الاختيار تتم بطريقة عشوائية ، وهذا يعنى أن كل عنصر يكون له نفس الفرصة فى الإختيار أى أن جميع نواتج فضاء العينة متساوية الإمكانات وجميع الأحداث الأولية متساوية الاحتمال.

مثال

(١١) كيس يحتوى ٤ كرات بيضاء ، ٥ كرات حمراء ، ٣ كرات سوداء ، سحبت كرة واحدة عشوائيًا . أوجد إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة .

أولاً : حمراء **ثانيًا :** ليست بيضاء **ثالثًا:** بيضاء أو سوداء

الحل

ليكن ب هو حدث ظهور كرة بيضاء ، ح هو حدث ظهور كرة حمراء ، س هو حدث ظهور كرة سوداء.

عملية سحب كرة واحدة عشوائيًا يعنى أن كل كرة لها نفس الفرصة فى الإختيار ولكن وجود ٤ كرات بيضاء يعنى وجود ٤ فرص لظهور كرة بيضاء وهكذا

∴ ف = {ب ، ب ، ب ، ب ، ح ، ح ، ح ، ح ، ح ، س ، س ، س}

∴ ن (ف) = ٤ + ٥ + ٣ = ١٢

ويمكن نمذجة المسألة كما فى الجدول المجاور

الحدث	ب	ح	س	المجموع
عدد الكرات	٤	٥	٣	١٢

∴ ل (ب) = $\frac{٤}{١٢}$ ، ل (ح) = $\frac{٥}{١٢}$ ، ل (س) = $\frac{٣}{١٢}$

أولاً : احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء = ل (ح) = $\frac{٥}{١٢}$

ثانيًا: احتمال أن تكون الكرة المسحوبة ليست بيضاء = ل (ب′) = ١ - ل (ب)

= ١ - $\frac{٤}{١٢}$ = $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

أو ل(ب′) = $\frac{٣+٥}{١٢}$ = $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

ثالثًا: احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء أو سوداء = ل (ب ∪ س)

∵ ب ، س إحداث متنافية ∴ ل (ب ∪ س) = ل (ب) + ل(س) = $\frac{٤}{١٢}$ + $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{٧}{١٢}$

حاول أن تحل

(١٢) إذا فاز طالب فى مباراة تنس الطاولة فسيمنح جائزة باختيار جائزته عشوائيًا من بين ١٨ قلمًا ، ١٢ مضربًا ، ١٠ ساعات. ما احتمال أن تكون الجائزة .

أولاً : ساعة **ثانيًا:** قلمًا أو مضربًا **ثالثًا:** ليست قلمًا.

مثال

(١٢) صندوق به عدد من الكرات المتماثلة والملونة بألوان مختلفة منها الحمراء (ح)، والصفراء (ص) و٢٠ كرة زرقاء (ز) ، سحبت منه كرة واحدة عشوائيًا ولوحظ لونها :

أ إذا كان ل (ز) = $\frac{١}{٥}$ ، ما عدد كل الكرات بالصندوق؟

ب إذا كان احتمال أن تكون الكرة حمراء أو زرقاء = $\frac{١١}{٢٠}$ ، ما عدد الكرات الحمراء ؟

ج أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة .

أولاً : صفراء **ثانيًا :** ليست حمراء أو صفراء.

الحل

∵ سحب الكرة عشوائيًا ∴ جميع الامكانات متساوية

أ ∵ ل (ز) = $\frac{\text{عدد الكرات الزرقاء}}{\text{عدد الكرات بالصندوق}}$ = $\frac{١}{٥}$ ∴ عدد الكرات بالصندوق = ٢٠ × ٥ = ١٠٠ كرة

ب ∵ ل(ح∪ ز) = ل (ح) + ل(ز) = $\frac{١١}{٢٠}$ ∴ ل(ح) = $\frac{١١}{٢٠}$ - $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٧}{٢٠}$

ويكون عدد الكرات الحمراء = $\frac{٧}{٢٠}$ × ١٠٠ = ٣٥ كرة

ج عدد الكرات الصفراء = ١٠٠ - (٢٠ + ٣٥) = ٤٥ كرة

أولاً: إحتمال أن تكون الكرة صفراء = ل (ص) = $\frac{٤٥}{١٠٠}$ = $\frac{٩}{٢٠}$

ثانيًا: احتمال أن تكون الكرة حمراء أو صفراء = ل (ح ∪ ص)

ل (ح∪ ص) = ل(ح) + ل(ص) = $\frac{٧}{٢٠}$ + $\frac{٩}{٢٠}$ = $\frac{١٦}{٢٠}$ = ٠,٨

∴ إحتمال أن تكون الكرة ليست حمراء أو صفراء = ل (ح ∪ ص)′

ل (ح ∪ ص)′ = ١ - ل (ح ∪ ص) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

حاول أن تحل

(١٣) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الامكانات ، وكان ل (أ ∪ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فإذا كان عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث أ يساوى ١٣ وعدد جميع النواتج الممكنة للتجربة يساوى ٣٦ فأوجد :

أولاً : احتمال وقوع أ و ب معًا **ثانيًا :** احتمال وقوع أ وعدم وقوع ب

مثال

(١٣) القيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية ولوحظ تتابع الصور والكتابات احسب احتمالات الاحداث الآتية :

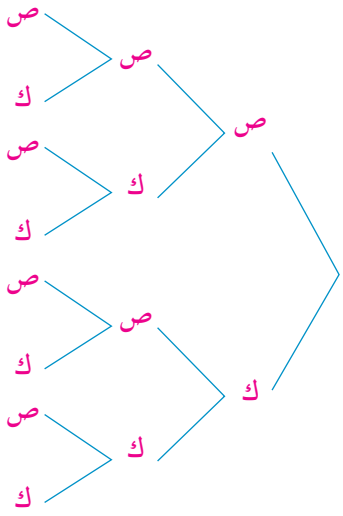
أولاً: أ حدث ظهور صورة واحدة فقط. **ثانيًا:** ب حدث ظهور صورتين على الأقل.

ثالثًا: ج حدث ظهور صورتين بالضبط.

الحل

∵ قطعة النقود منتظمة ∴ دالة الاحتمال منتظمة

ف = { (ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك) ،
(ك، ص، ص)، (ك، ص، ك) ، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}، ن (ف) = ٨



أولاً: ∵ أ حدث ظهور صورة واحدة فقط .

∴ أ = { (ص، ك، ك) ، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)} ،

ن(أ) = ٣ ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$

ثانيًا : ∵ ب حدث ظهور صورتين على الأقل أى إما صورتان أو ثلاث صور

∴ ب = { (ص، ص، ك) ، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ص، ص، ص)}

∵ ن (ب) = ٤ ∴ ل (ب) = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

ثالثًا: ∵ ج حدث ظهور صورتين بالضبط

∴ ج = { (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)}

∵ ن (ج) = ٣ ∴ ل (ج) = $\frac{٣}{٨}$

حاول أن تحل

(١٤) فى المثال السابق إحسب الاحتمالات الآتية :

أولاً : أ حدث ظهور ثلاثة نواتج متشابهة **ثانيًا :** ب حدث ظهور صورة على الأكثر.

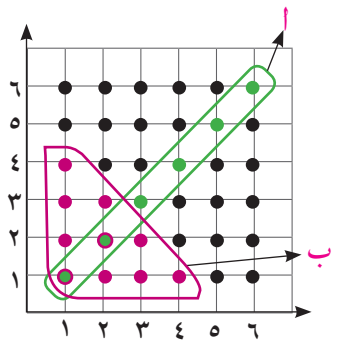
ثالثًا: ج حدث ظهور عدد فردى من الصور **رابعًا:** د حدث ظهور كتابة على الأقل.

خامسًا: هـ حدث ظهور عدد من الصور يساوى نفس العدد من الكتابات.

مثال

(١٤) القى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة فإذا كان أ هو حدث الحصول على نفس العدد فى المرتين وكان ب هو حدث أن يكون مجموع العددين الظاهرين أقل من او يساوي ٥ ، أوجد كل من الاحتمالات التالية : ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ ∩ ب) ، ل (أ - ب)

الحل



من التمثيل الهندسى المقابل لفضاء العينة تلاحظ أن :

ن(ف) = ٣٦ ، ن (أ) = ٦ ، ن(ب) = ١٠

∴ ل (أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = $\frac{١}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{١٠}{٣٦}$ = $\frac{٥}{١٨}$

لاحظ أن: أ ∩ ب يتضمن عنصران فقط

∴ ن (أ ∩ ب) = ٢ ويكون ل (أ ∩ ب) = $\frac{٢}{٣٦}$ = $\frac{١}{١٨}$

∵ ل (أ - ب) = ل (أ) - ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ - ب) = $\frac{١}{٦}$ - $\frac{١}{١٨}$ = $\frac{٣-١}{١٨}$ = $\frac{١}{٩}$

حاول أن تحل

(١٥) فى المثال السابق إحسب احتمال الاحداث التالية :

أولاً : حدث وقوع أ أو ب **ثانيًا :** حدث وقوع ب فقط

ثالثًا: حدث عدم وقوع أ وعدم وقوع ب

تمـارين الدرس الثالث

(١) اكتب فضاء العينة لكل من التجارب الآتية:

أ سحب بطاقة عشوائيًا من مجموعة بطاقات متماثلة مدون عليها أرقام العدد ٧٨٢٥٩٦٤٣١ وملاحظة العدد الظاهر فى البطاقة.

ب القاء قطعة نقود ثم حجر نرد فيه وجهان يحملان الرقم ١، وجهان يحملان الرقم ٢، وجهات يحملان الرقم ٣، وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

جـ صندوق به ثلاث كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣ سحبت كرتين الواحدة بعد الأخرى بدون إحلال وملاحظة العدد المدون على الكرة.

حقائب مدرسية:

(٢) يرغب طالب فى شراء حقيبة و يمكنه إختيارها من ثلاث أنواع بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بنى ، مثل فضاء العينة فى هذا الموقف بالشجرة البيانية.

(٣) القيت قطعة نقود مرتين متتاليتين ولوحظ الوجهان الظاهران، اكتب فضاء النواتج، ثم عين كلًا من الاحداث الآتية:

- الحدث أ «ظهور كتابة واحدة فقط».
- الحدث ب «ظهور نواتج متشابهة».
- الحدث ج «ظهور كتابة على الأكثر».
- الحدث د «ظهور أكثر من صورتين».

(٤) فى تجربة القاء قطعة نقود ثم حجر نرد وملاحظة ما يظهر على وجهيهما العلويين.

أ اكتب فضاء العينة المرتبطة بهذه التجربة ثم عين كلًا من الاحداث الآتية.

- الحدث أ «ظهور صورة وعدد فردى».
- الحدث ب «ظهور كتابة وعدد زوجى».
- الحدث ج «ظهور عدد أولى».
- الحدث د «ظهور عدد يقبل القسمة على ٣».

ب عبر بلغة المجموعات عن كل من الاحداث التالية ثم اكتب عناصرها.

- حدث وقوع أ أو ب.
- حدث وقوع ب و ج.
- حدث عدم وقوع د.

(٥) فى تجربة القاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

أ عين كلًا من الأحداث التالية:

- الحدث أ «ظهور عددين متساويين».
- الحدث ب «ظهور عددين مجموعهما ٩».
- الحدث ج «ظهور عددين مجموعهما ١٣».
- الحدث د «ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأقل».

ب أى الاحداث السابقة متنافيه مثنى مثنى.

ج عبر لفظيًا عن الاحداث التالية ثم عين كل منها.
أَ ، جَ ، أ ∪ ب ، أ ∩ د ، د - أ ، ب ∩ جَ

٦ القى حجر نرد منتظم كتب على أوجهه الاعداد ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣
أ احسب احتمال كل من الاحداث التالية:

- أ حدث ظهور عدد فردى.
- ب حدث ظهور عدد أولى.
- ج حدث ظهور عدد زوجى.
- د حدث ظهور عدد اكبر من ١٢.
- هـ حدث ظهور عدد مكون من رقمين.
- و حدث ظهور عدد مكون من رقم واحد.

ب احسب: ل(أ ∪ ج) ، ل(هـ ∪ و) ، ، ل(ب ∩ د).

٧ إذا كان ف = {أ ، ب، ج، د} فضاء عينة لتجربة عشوائية، ل دالة إحتمال لهذه التجربة، أوجد:
ل(أ) ، ل(ب) ، إذا كان ل (أ) = ٣ ل(ب)، ل(ج) = ل(د) = $\frac{٧}{١٨}$

٨ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، ل دالة إحتمال معرفة على ف، وكان:
ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ ، ل (أ - ب) = ٠,٢٥ أحسب ل(أ)، ل(ب).

٩ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، ل دالة إحتمال معرفة على ف وكان:
ل(أ) = $\frac{١}{٣}$، ل(ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ أوجد:

أ ل(أَ)
ب ل(أ ∪ ب)
ج ل(أ - ب)
د ل(أَ ∩ بَ)

١٠ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، ل دالة إحتمال لهذه التجربة حيث:
ل(أ) = ٠,٤ ، ل(بَ) = ٣ل(ب) ، ل(أ ∩ ب) = ٠,٢ إحسب احتمال:
أ وقوع أ فقط.
ب وقوع أ أو ب.
ج عدم وقوع أ وعدم وقوع ب.

١١ صندوق به كرات متماثلة وملونه منها ٤ حمراء، ٦ زرقاء، ٥ صفراء سحبت منه كرة واحدة عشوائيًا. احسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:
أ حمراء
ب زرقاء أو صفراء
ج ليست زرقاء
د ليست حمراء ولا صفراء

١٢ مجموعة بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المدون عليها.
احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:
أ عددًا يقبل القسمة على ٣
ب عددًا يقبل القسمة على ٥

ج عددًا يقبل القسمة على ٣ و ٥
د عددًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥

(١٣) القيت ثلاث قطع نقود متمايزة مرة واحدة. احسب احتمال كل من الاحداث التالية:

- أ حدث ظهور صورة واحدة أو صورتين.
- ب حدث ظهور صورة واحدة على الأقل.
- ج حدث ظهور صورة واحدة أو ثلاث صور.
- د حدث ظهور كتابتين متتاليتين على الاقل.

(١٤) فى تجربة القاء حجر نرد مرتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة، احسب احتمال كل من الاحداث التالية:

- حدث ظهور العدد ٤ فى الرمية الأولى.
- حدث مجموع العددين فى الرميتين يساوى ٨
- حدث مجموع العددين فى الرميتين لايزيد عن ٥

(١٥) عينة عشوائية تتكون من ٦٠ شخصًا شملهم استطلاع للرأى، وجد أن ٤٠ شخصًا منهم يشجع نادى الهلال، ٢٨ شخصًا يشجع نادى النجمة، وأن ٨ أشخاص لايشجعون أيًا من الناديين.
إذا إختير شخص عشوائيًا من أفراد العينة فما احتمال أن يكون الشخص المختار من مشجعى:

أ أحد الناديين على الأقل.
ب الناديين معًا.
ج نادى الهلال فقط.
د أحد الناديين فقط.

ملخص الوحدة

١ تمثيل البيانات بمخطط الساق والاوراق

٢ **الربيع الأدنى (الأول):** هو القيمة العددية التى تقل عنها ربع القيم ويزيد عنها ثلاثة أرباع القيم ويرمز له بالرمز $(ر_١)$

٣ **الربيع الأعلى (الثالث):** هو القيمة العددية التى تقل عنها ثلاثة أرباع القيم وتزيد عنها ربع القيم ويرمز له بالرمز $(ر_٣)$

٤ **المدى الربيعى:** هو أحد مقاييس التشتت لا يتأثر بالقيم المتطرفة حيث

المدى الربيعى = الربيع الأعلى - الربيع الأدنى = $ر_٣ - ر_١$

٥ استنتاج الوسيط ، الربيع الأعلى ، الربيع الأدنى ، المدى الربيعى لبيانات ممثلة بطريقة الساق والأوراق.

٦ **التجربة العشوائية:** هى كل تجربة يمكن معرفة جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها ولكننا لا نستطيع أن نحدد بصفة مؤكدة أيًا من هذه النواتج سيتحقق فعلًا عند إجرائها.

٧ **فضاء العينة (فضاء النواتج):** فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة كل النواتج الممكنة لهذه التجربة ويرمز له بالرمز ف

٨ **الحدث :** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

٩ **حدث بسيط (أولى):** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة تحوى عنصرًا واحدًا فقط

١٠ **حدث مؤكد :** هو الحدث الذى عناصره هى عناصر فضاء العينة ب.

١١ **حدث مستحيل:** هو الحدث الخالى من أى عنصر ويرمز له بالرمز ϕ

١٢ **العمليات على الاحداث:** التقاطع - الاتحاد - الاكمال - الفرق

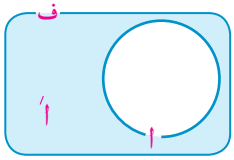
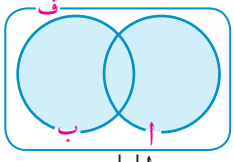
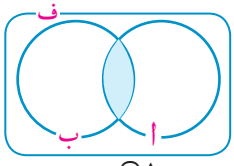
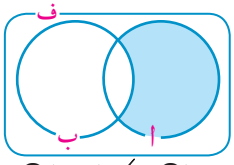
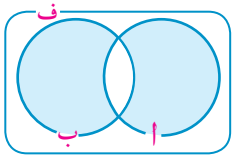
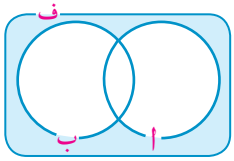
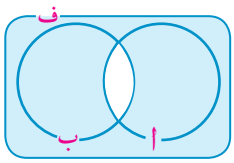
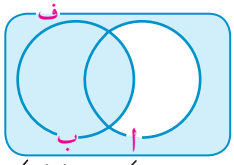
١٣ **الاحداث المتنافية**

- يقال أن الحدثين أ، ب متنافيان إذا كان أ ∩ ب = ϕ
- يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت وفقط إذا كانت متنافية مثنى مثنى

١٣ **مسلمات الاحتمال**

- لكل حدث أ ⊂ ف يوجد عدد حقيقى يسمى احتمال الحدث أ يرمز له بالرمز ل حيث : ٠ ≤ ل(أ) ≤ ١
- ل(ف) = ١
- إذا كان أ ⊂ ف، ب ⊂ ف وكان أ، ب حدثين متنافيين فإن: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

١٤ الأحداث بالصورة اللفظية وتمثيلها بشكل ڤن واحتمالاتها (أ ⊃ ب، ب ⊃ ف):

الحدث فى صورة لفظية	تمثيل الحدث بشكل ڤن	احتمال وقوع الحدث
عدم وقوع الحدث أ		ل(أ) = ١ - ل(أ)
وقوع أ أو ب (وقوع أحدهما على الأقل)	 أ ∪ ب	ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)
وقوع أ و ب (وقوعهما معًا)	 أ ∩ ب	ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∪ ب)
وقوع الحدث أ فقط (وقوع أ وعدم وقوع ب)	 أ - ب = أ ∩ ب′ = أ - (أ ∩ ب)	ل(أ - ب) = ل(أ) - ل(أ ∩ ب) = ل(أ ∩ ب′)
وقوع أحدهما فقط (وقوع أ فقط أو وقوع ب فقط)	 (أ - ب) ∪ (ب - أ)	ل((أ - ب) ∪ (ب - أ)) = ل(أ - ب) + ل(ب - أ) = ل(أ ∪ ب) - ل(أ ∩ ب)
عدم وقوع أى من الحدثين (عدم وقوع أ وعدم وقوع ب)	 (أ ∪ ب)′ = أ′ ∩ ب′	ل(أ ∪ ب)′ = ل(أ′ ∩ ب′) = ١ - ل (أ ∪ ب)
عدم وقوع الحدثين معًا (عدم وقوع أ أو عدم وقوع ب)	 (أ ∩ ب)′ = أ′ ∪ ب′	ل(أ ∩ ب)′ = ل(أ′ ∪ ب′) = ١ - ل(أ ∩ ب)
عدم وقوع أ فقط (وقوع ب أو عدم وقوع أ)	 (أ - ب)′ = ب ∪ أ′	ل(أ - ب)′ = ١ - ل(أ - ب) = ل (ب ∪ أ′) = ل (أ ∩ ب)′ = ل (ب ∪ أ′)

تمارين عامة (الوحدة الرابعة)

(١) مثل كل مجموعة من البيانات الآتية بمخطط الساق والأوراق باختيار المفتاح المناسب للبيانات ثم أوجد الوسيط لكل منها:

أ أطوال مجموعة من الطلاب بالسنتميترات:

١٦٣	١٧٠	١٨٨	١٧٢	١٦٥	١٦١	١٨٤	١٨١
١٩١	١٦٢	١٧٥	١٦١	١٨٥	١٧٢	١٦٥	

ب أوزان عبوات بعض المحاصيل الزراعية بالكيلو جرام:

٩,٤	١٣,٣	١٢	١٤,١	١٠,٢	٩,٦	١١,٣	١٤,٤	١١,٥	٩,٦

ج المبيعات الشهرية لأحد المتاجر بالمليون جنية:

٢,٢٥	٢	١,٩٧	٢,٥	٢,٢٩	٢,٥	٢,١٦	٢,٢١
٢,٠٩	١,٩٥	٢,٠٥	١,٩٩				

(٢) أوجد الوسيط - الربيع الادنى - الربيع الأعلى - المدى الربيعى لبيانات مخططات الساق والأوراق الآتية:

أ

زمن الرحلة بالدقائق	
٤ \| ٢ = ٤٢ الأوراق	الساق
٢ ١ ٢ ٥	٤
٧ ٣ ٦	٥
٠	٦
٦ ٤ ٦ ٢	٧
٥ ١ ٥	٨

ب

المبيعات بآلاف الجنيهات	
٤ \| ٧ = ٤,٧ الأوراق	الساق
٧ ٦ ٨ ٨ ٦	٤
٠ ٢ ٣ ١	٥
٧ ٥	٥
١ ٢ ١ ٣	٦
٩	٦

ج

وزن الذهب بالجرام	
٣ \| ٢٤ = ٢٤,٣ الأوراق	الساق
٢ ٣ ١	٢٢
٦ ٥	٢٢
٤ ٠ ٤	٢٣
٩ ٧ ٧ ٥ ٦	٢٣
٣ ٢ ١	٢٤

تفكير ناقد:

(٣) بين كيف يمكن تمثيل البيانات التالية بمخطط الساق والأوراق ثم استنتج قيمة الوسيط - المدى الربيعى:

٩٠٠	٧٥٠	٧٧٠	٨٥٠	٨٦٠	٧٨٠	٨١٠	٩٢٠
٦٨٠	٨٢٠	٧٨٠	٩٥٠				

(٤) توضح البيانات الآتية المبيعات اليومية لأحد المطاعم الشهيرة فى فرعيها أ، ب مقدره بآلاف الجنيهات:

فرع أ	٢١	٣٢	٢٠	٢٨	١٤	١٨	٢٥	١٤	١٧	٢٤	١٦	٢٢
فرع ب	٣٦	٢٣	١٨	٣٤	٢٤	٢٨	٢٧	٢١	١١	١٦	١٤	١٣

أ مثل هذه البيانات بمخطط الساق والأوراق ظهرًا لظهر.

ب استنتج الوسيط لكل من الفرعين وقارن بينهما.

ج باستخدام المدى الربيعى بين أى البيانات أكثر تجانسًا.

٥ سحبت بطاقتان عشوائيًا من كيس به أربع بطاقات كتبت عليها الاحرف أ، ب، جـ، ء اكتب فضاء العينة لهذه التجربة فى كل من الحالات الآتية:

أ سحبت البطاقتان واحدة بعد الآخرى مع الاحلال.

ب سحبت البطاقاتان واحدة بعد الأخرى دون إحلال.

مطاعم:

٦ يقدم أحد المطاعم وجبات كاملة مكونة من طبق رئيس - مقبلات - عصائر، يمكن إختيارها من نوعين أ، ب للطبق الرئيس، وثلاثة أنواع من المقبلات جـ، ء، هـ ونوعين من العصائر س ، ص، إرسم الشجرة البيانية لتتابع عملية الاختيار واكتب عدد الوجبات الكاملة التى يقدمها هذا المطعم.

هندسة:

٧ طلب معلم من طلابه رسم شكلين رباعيين بصورة عشوائية، الأول قطراه متعامدان والآخر فيه ضلعان متوازيان على الأقل. مثل فضاء العينة بالشجرة البيانية والصورة الهندسية، ثم اذكر عدد نواتج فضاء العينة.

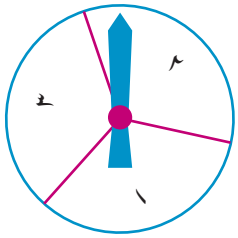
تفكير ناقد:

٨ صندوق يحتوى ٥ كرات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥ سحبت منه عشوائيًا ثلاث كرات الواحدة تلو الأخرى بدون إحلال. ما عدد عناصر فضاء العينة؟

و إذا كان فى الصندوق ن كره متماثلة فما عدد عناصر فضاء العينة عندئذ؟

هل يمكن استخدام التباديل فى حساب عدد عناصر فضاء العينة؟ فسر إجابتك.

القرص الدوار:



٩ يلعب أحمد و يوسف لعبة القرص الدوار، فيدير اللاعب القرص الدوار الموضح بالشكل مرتين و يلاحظ العدد الذى يتوقف عليه المؤشر كل مرة فإذا كان المجموع فرديًا يكسب أحمد و إذا كان المجموع زوجيًا يكسب يوسف. احسب إحتمال فوز أحمد. هل اللعبة عادلة؟ فسر إجابتك.

١٠ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية، ل دالة إحتمال معرفة على ف.

أكمل لتكون العبارة صحيحة فيما يأتى:

أ إذا كان أ، ب حدثين متنافيين:

➢ أ ∩ ب = ... ➢ أ - ب = ... ➢ ب - أ = ...

ب إذا كان ب ⊂ أ فإن:

➢ (أ ∩ ب) = ... ➢ أ ∪ ب = ... ➢ ب - أ = ...

جـ إذا كان ل(أ) = ٠,٣ ، ل(ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فإن:

➢ ل(أ ∪ ب) = ... ➢ ل(ب - أ) = ... ➢ ل(أ′ ∩ ب) = ...

د إذا كان أ ∩ ب = ϕ ، ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن:

➢ ل(أ ∪ ب) = ... ➢ ل(أ ∩ ب) = ... ➢ ل(أ - ب) = ...

(١١) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية، ل دالة احتمال معرفة على ف، وكان أ ⊃ ب ، ل(أ) = $\frac{١}{٢}$، احتمال وقوع ب فقط = ٠,٢ . احسب إحتمال عدم وقوع ب.

(١٢) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية، ل دالة إحتمال معرفة على ف، وكان ل(أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل(ب) = س، ل(أ ∪ ب)′ = $\frac{١}{٣}$

أ أوجد قيمة س إذا كان:

➢ أ، ب حدثان متنافيان. ➢ أ ⊃ ب.

ب إذا كانت س = $\frac{١}{٤}$ فأوجد ل(أ ∩ ب).

(١٣) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية، اعط تعبيرًا رمزيًا لكل من الاحداث الآتية، ومثلها بشكل ڤن:

أ عدم وقوع الحدث أ. ب وقوع أى الحدثين أ أو ب.

ج وقوع الحدث ب فقط. د وقوع أ أو عدم وقوع ب.

هـ عدم وقوع الحدثين معًا. و وقوع أحدهما فقط.

(١٤) فى تجربة القاء قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات مثل فضاء العينة لهذه التجربة بالشجرة البيانية، ثم احسب إحتمال كل من الأحداث التالية:

أ الحدث أ «ظهور صورتين فقط». ب الحدث ب «ظهور صورتين على الأكثر».

ج الحدث ج «ظهور كتابة واحدة على الاكثر». د الحدث د «تشابه ناتج الرميات الثلاث».

(١٥) فى تجربة القاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى.

أ ارسم شكلًا هندسيًا يمثل فضاء العينة ف موضحًا عليه كل من الأحداث الآتية:

➢ الحدث أ «الحصول على عددين مجموعهم فردى وأكبر من ٦».

➢ الحدث ب «الحصول على عددين أحدهما ٢ ومجموعها ≥ ٥».

➢ الحدث ج «الحصول على عددين متساويين».

ب أى الاحداث أ، ب، ج متنافية تبادليًا.

ج احسب الاحتمالات الآتية:

➢ ل(أ ∪ ب) ، ل(ب ∩ ج) ، ل(أ ∪ ج)′ ، ل(ب - ج).

(١٦) خمسة بطاقات متماثلة مرقمة من ٢ إلى ٦ سحبت بطاقتين الواحدة بعد الآخرى بدون إحلال وملاحظة الرقم المسجل عليها لتكوين جميع الأعداد الممكنة ذات الرقمين. أوجد احتمال:

أ أن يكون رقم الاحاد عددًا أوليًا.

ب أن يكون رقم العشرات عددًا فرديًا.

ج أن يكون رقم الاحاد عددًا أوليًا أو رقم العشرات عدد فرديًا.

صحف:

(١٧) فى عينة من ٥٠ شخصًا وجد أن ٢٧ شخصًا يقرأون الصحيفة أ، ٢٤ يقرأون الصحيفة ب، ٩ أشخاص يقرأون الصحيفتين معًا. إختير شخصًا واحدًا من هذه العينة عشوائيًا. أوجد احتمال أن يقرأ الشخص المختار

أ الصحيفة أ فقط.

ب إحدى الصحيفتين على الأقل.

سياحة:

(١٨) فى أحد عروض مشروع الصوت والضوء بالهرم حضر ٢٠٠ شخص من جنسيات مختلفة بيانهم موضح بالجدول الآتى ، فإذا إختير أحد الحاضرين عشوائيًا عن طريق بطاقات الدخول الخاصة بهم لمنحه جائزة تذكارية. أوجد أحتمال أن يكون الشخص المختار

	عربى	اوربى	امريكى	المجموع
رجل	٣٢	٤٧	١٥	٩٤
سيدة	٢٣	٦٣	٢٠	١٠٦
المجموع	٥٥	١١٠	٣٥	٢٠٠

أ رجل أوربى.

ب سيدة امريكية.

ج سيدة.

د ذو جنسية عربية أو أوربية.

اختبار تراكمى

إختر الاجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

الأوراق	الساق	
١ ٣	٥	
٢ ٤ ٤ ٦ ٨	٦	
٠ ١ ٤	٧	
٣	٥ = ٥٣	

(١) فى مخطط الساق والأوراق المقابل الوسيط يساوى:

أ) ٤ ب) ٦٥

جـ) ٦٤ د) ٧٤

(٢) إذا كان أ ⊂ ف، ب ⊃ ف حيث ف فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان أ ⊃ ب فإن: ل(أ ∪ ب) يساوى

أ) ل(أ) + ل(ب) ب) ل(أ) جـ) ل(ب) د) ل(ب - أ)

(٣) إذا كان أ ⊃ ف حيث ف فضاء عينة لتجربة عشوائية، ل دالة إحتمالية معرفة على ف، وكان $\frac{\text{ل}(أ')}{\text{ل}(أ)} = \frac{٣}{٤}$ فإن ل (أ) يساوى

أ) $\frac{٤}{٣}$ ب) $\frac{٣}{٧}$ جـ) $\frac{٤}{٧}$ د) $\frac{٣}{١٠}$

(٤) القى حجر نرد منتظم مرقم من ١ إلى ٦ مرة واحدة ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى له فإذا كان الحدث أ هو ظهور عدد فردى، الحدث ب هو ظهور عدد أولى، فإن ل(أ ∩ ب) يساوى

أ) $\frac{١}{٦}$ ب) $\frac{١}{٣}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) $\frac{٢}{٣}$

اسئلة ذات إجابات قصيرة:

الأوراق	الساق	
١ ٢ ٢	٢	
٧ ٧	٢	
٠	٣	
٥ ٨ ٩	٣	
١ ١	٤	
٦ ٧ ٨ ٩	٤	
٣	٨ = ٣٨ درجة	

(٥) يمثل مخطط الساق والأوراق المقابل درجات مجموعة من الطلاب فى أحد الاختبارات أوجد:

أ) عدد طلاب هذه المجموعة والدرجة الوسيطية.

ب) الربيع الأدنى والربيع الأعلى، المدى الربيعى.

(٦) فوج سياحى مكون من ١٩ سائحًا من روسيا، ١٧ سائحًا من إيطاليا، ١٤ سائحًا من فرنسا، إختير أحدهم عشوائيًا، احسب احتمال أن يكون السائح:

أ) من روسيا أو من فرنسا. ب) ليس من فرنسا.

جـ) من أوربا. د) من هولندا.

(٧) فى احتفال المدرسة بتكريم أوائل طلابها، إذا كان احتمال حضور المحافظ ٠,٨، وإحتمال حضور مدير عام التعليم ٠,٩ وإحتمال حضورهما معًا ٠,٧٥ أوجد:

أ) إحتمال حضور المحافظ فقط. ب) إحتمال حضور أحدهما على الأقل.

جـ) احتمال عدم حضورهما معًا.

اسئلة ذات إجابات طويلة:

(٨) يبين الجدول التالى أوزان لاعبى الفريقين أ، ب لكرة القدم فى أحد النوادى بالكيلو جرام.

الفريق أ	٧٣	٦٩	٦٥	٧٩	٨٨
	٨٦	٧٧	٧٣	٧٧	٩٠
	٦٩	٧٣	٦٦	٧٤	٩١
الفريق ب	٨٦	٧٣	٨٤	٨٧	٦٩
	٧٢	٦٦	٦٧	٧٤	٨١
	٧٨	٦٤	٧١	٦٣	٧٣

أ مثل هذه البيانات بمخطط الساق والأوراق ظهرًا لظهر.

ب استنتج الوزن الوسيط لكلا الفريقين وقارن بينهما.

ج باستخدام المدى الربيعى بين أى الفريقيين اكثر تجانسًا.

(٩) القى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوى فى كل مرة، مثل فضاء العينة بطريقة هندسية ثم أوجد احتمال:

أ الحدث أ «ظهور العدد ٢ على الوجه العلوى مرة واحدة على الأقل».

ب الحدث ب «مجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوى فى الرميتين هو ٦».

ج وقوع أ أو ب.

(١٠) أ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ف، ل دالة إحتمال معرفة على ف.

فإذا كان ل(أ) = ٠,٦، ل(ب') = ٠,٣، ل(أ ∪ ب) = ٠,٩، أوجد إحتمال كل من الاحداث الآتية:

أ وقوع أ و ب ب ووقع أ وعدم وقوع ب ج وقوع أ فقط أو ب فقط

إذا لم تستطع حل السؤال رقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ارجع إلى	٢-٤	٣-٤	٣-٤	٣-٤	٢-٤	٣-٤	٣-٤	١-٤ ٢-٤	٣-٤	٣-٤

الاختبار الأول — تطبيقات الرياضيات

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) قوتان مقدارها ٨ ، ١٢ نيوتن وقياس الزاوية بينهما ٦٠° فإن مقدار محصلتها ع = ...

(٢) ثلاث قوى متساوية المقدار متلاقية فى نقطة ومتزنة فإن قياس الزاوية بين أى قوتين منها = ...

(٣) ١٤٤ كم/س = ... م/ث

(٤) يقال أن الحدثين أ ، ب متنافيان إذا كان

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(١) تظهر قوي التجاذب المادى بين الأجرام السماوية بوضوح وذلك:

أ لبعد المسافة بينهما ب لكبر كتل هذه الأجسام ج لقرب المسافة بينهم د ب، جـ معًا

(٢) إذا سقط جسم من قمة برج فوصل لسطح الأرض بعد ٤ ثون فإن ارتفاع قمة البرج = ... متر.

أ ٨٩ ب ٣٩,٢ ج ٧٨,٤ د ٤٣,٢

(٣) المساحة الجانبية لمخروط قائم طول نصف قطر قاعدته ٦سم، وارتفاعه ٨سم = ... سم^{٢}

أ ٦٠π ب ٢٨π ج ١٠π د ٤٨π

(٤) النقطة التى تقع على الدائرة $(س - ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٣$

أ (٢، ٣) ب (٣، -٢) ج (٢، ٥) د (٤، ٣)

السؤال الثالث:

(١) قوتان مقدارهما ٣٢، ٦٠ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية، إذا كان مقدار محصلتهما ٥٢ نيوتن أوجد قياس الزاوية بين هاتين القوتين.

(٢) يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة ٤سم/ث^{٢} فى اتجاه حركته وبعد أن قطع مسافة ٦,٢٥متر أصبحت سرعته ١٠٠سم/ث فما هى سرعته الابتدائية.

السؤال الرابع:

(١) قضيب منتظم طوله ١٠٠سم ووزنه ١٥٠ ث جم علق من طرفيه تعليقًا حرًا بواسطة خيطين ثبت طرفاهما فى نقطة واحدة فإذا كان طولا الخطين ٨٠سم، ٦٠سم فأوجد مقدار الشد فى كل منها.

(٢) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠سم وارتفاعه $١٠\sqrt{٣}$سم. أوجد مساحته الجانبية.

السؤال الخامس:

(١) أ ب جـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، $٦\sqrt{٣}$ ، ٥ ، $٤\sqrt{٣}$ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٢) احسب الربيع الأدنى والربيع الأعلى للقيم التالية: ٣٨ ، ٢٥ ، ٤٦ ، ١٧ ، ٢٨ ، ٣٢ ، ٦٥ ، ٧٨ ، ٢٤ ، ٥٩ ، ١١ ، ٣٥

الاختبار الثانى — تطبيقات الرياضيات

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) قوتان مقدارهما ٢و، ٨ نيوتن متلاقيتان فى نقطة واحدة ومحصلتهما تنصف الزاوية بينهما فإن و = ...

(٢) تتحرك سيارتان أ، ب على طريق مستقيم واحد وفى اتجاهين متضادين بالسرعتين ١٢٥ كم/س، ٧٥ كم/س على الترتيب فإن سرعة السيارة ب بالنسبة إلى السيارة أ = ...

(٣) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع

(٤) الحدث الخالى من أى عنصر يسمى بالحدث

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(١) إذا كان $\overrightarrow{و_1} = ٢\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{و_2} = \overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ فإن ع = ... نيوتن

أ $\sqrt{١٣}$ ب $\sqrt{٢}$ ج ٥ د ٧

(٢) مقدار قوة الجاذبية بين كتلتين ك$_1$، ك$_2$ تفصل بين مركزيهما مسافة ف هو :

أ $و = ث \times \frac{ف^2}{ك_1 ك_2}$ ب $و = ث \times \frac{ك_1 ف^2}{ك_2^2}$ ج $و = ث \times \frac{ك_1 ك_2}{ف^2}$ د $و = ث \times \frac{ك_2 ف^2}{ك_1}$

(٣) مركز الدائرة $س^2 + ص^2 - ٦س + ٨ص = صفر$ هو

أ (٣، -٤) ب (٤، -٣) ج (-٣، ٤) د (-٤، ٣)

(٤) المساحة الجانبية لهرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢سم وارتفاعه ٨سم يساوى سم^2.

أ ٣٦٠ ب ٩٦ ج ١٤٤ د ٢٤٠

السؤال الثالث:

(١) وضع جسم وزنه ٣٠ ث كجم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥ وحفظ اتزان الجسم بواسطة قوة أفقية. أوجد مقدار القوة ورد فعل المستوى.

(٢) يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمة فقطع فى الثوانى الثلاث الأولى من حركته ٧٢سم وفى الثانيتين التاليتين ٤٥سم. أوجد سرعته الابتدائية ومقدار عجلته.

السؤال الرابع:

(١) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٨٥ ، ٧٥ ، $٢٧٥٠٠\sqrt{}$ ث كجم تؤثر فى نقطة، الأولى نحو الشرق والثانية فى اتجاه ٣٠° غرب الشمال والثالثة ٤٥° جنوب الغرب. أوجد مقدار واتجاه محصلة هذه القوى.

(٢) تحرك جسم من السكون فى خط مستقيم فقطع ٢٠٠ مترًا فأصبحت سرعته ٧٢ كم/س ثم انقطعت العجلة وسار بالسرعة التى اكتسبها مسافة ٣٦٠ مترًا ثم تحرك بعجلة تقصيرية مقدارها ٥م/ث^2 حتى سكن. احسب السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.

السؤال الخامس:

(١) أوجد طول نصف قطر دائرة مخروط قائم مساحته الكلية ٦١٦ π سم^2 وطول راسمه ٣٠سم.

(٢) احسب المدى الربيعى والوسيط للقيم التالية: ٧، ٨، ١١، ١، ١٠، ٦، ٤، ١٠، ٨، ٩، ٥، ١٩

الاختبار الثالث — تطبيقات الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

١ قوتان متلاقيتان فى نقطة مقدارهما $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ وقياس الزاوية بينهما ى فإن مقدار محصلتهما ع = ...

.....

٢ إذا كانت $\overrightarrow{ق_1}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ ثلاث قوى متزنة ومتلاقية فى نقطة واحدة وكانت $\overrightarrow{ق_1}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ - ٣ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ٣ $\overrightarrow{س}$ + ٥ $\overrightarrow{ص}$ فإن $\overrightarrow{ق_3}$ = ...

٣ كل الأجسام تتجاذب مع الأجسام الأخرى بواسطة قوة تتناسب طرديًا مع وعكسيًا مع

٤ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = ...

السؤال الثانى: **إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-**

١ مقدار محصلة قوتان متعامدتان مقدارهما ٦، ٨ نيوتن يساوى:

أ ٦ ب ٨ ج ١٤ د ١٠

٢ تحرك جسيم بسرعة ٢٤م/ث وبعجلة تقصيرية ٦م/ث^2 فإن الجسم يتوقف لحظيًا بعد زمن = ... ثانية.

أ ٦ث ب ٥ث ج ٤ث د ٣ث

٣ حجم مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٨سم، وارتفاعه ١٢سم = ... سم^3

أ π٢٢٥ ب π١٩٢ ج π٢٥٦ د π٩٦

٤ الوسيط للقيم (٣، ٧، ٥، ٩، ١) هو

أ ٣ ب ٧ ج ١ د ٥

السؤال الثالث:

١ قوتان مقدارهما $\overrightarrow{ق_1}$، $\overrightarrow{ق_2}$ = ٣$\sqrt{}$ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ومحصلتهما عمودية على القوة الأولى. أوجد الزاوية بين القوتين وأثبت أن مقدار محصلتهما يساوى $\overrightarrow{ق_2}$.

٢ سقط حجر صغير من ارتفاع ١٢٢,٥ مترًا ، بعد كم ثانية يصل الحجر إلى الأرض.

السؤال الرابع:

١ خيط أملس طوله ٣٠سم، ربط من طرفيه في نقطتين أ، ب بحيث كان $\overline{أب}$ أفقيًا ، أ ب = ١٨سم فإذا انزلقت حلقة ملساء وزنها ١٥٠ ث جم على الخيط. أثبت أن فى وضع الاتزان يكون طولا فرعى الخيط متساويًا ثم أوجد الشد فى كل منهما.

٢ يتحرك جسيم فى خط مستقيم بعجلة منتظمه ٥سم/ث^2 فإذا بدأ الجسيم حركته بسرعة ٤٠سم/ث وفى نفس اتجاه العجلة فما هى المسافة التى يكون قد قطعها عندما تبلغ سرعته ٦٠م/د

السؤال الخامس:

١ أوجد الصورة العامة لمعادلة دائرة مركزها (٢، -٤) وطول نصف قطرها ٥سم.

(٢) أ ، ب حدثين من فضاء عينه لتجربه عشوائية ، ل دالة احتمال معرفة على ف حيث:
ل(أ′) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل(أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٤}$ فإوجد ل(ب)

أ أ ، ب حدثان متنافيان ب ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$

الاختبار الرابع — تطبيقات الرياضيات

أجب عن جميع الأسئلة التالية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

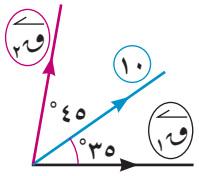
(١) القيمة الصغرى لمحصلة القوتين ١٥، ٨ نيوتن تساوى

(٢) إذا تحرك جسيم فى خط مستقيم بمتجه سرعه ابتدائية $\overrightarrow{ع}$ ومتجه عجلة ثابت $\overrightarrow{جـ}$ واصبح متجه سرعته $\overrightarrow{ع}$ بعد فترة زمنية ن فإن $\overrightarrow{جـ}$ = ...

(٣) قذف جسم رأسيًا لأعلى من نقطة على سطح الأرض فعاد إليها بعد ٦ ثوانى فإن أقصى ارتفاع وصل إليه = ...

(٤) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، أ ⊃ ب فإن ل(أ ∪ ب) = ...

السؤال الثانى: **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-**



(١) **فى الشكل المقابل:** قوة مقدارها ١٠ نيوتن حللت إلى مركبتين $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ يصنعان معها زاويتين قياسهما ٣٥°، ٤٥° فإن ق١ ≃ × نيوتن ، ق٢ ≃ ×

أ $\frac{\text{حا ٣٥}}{\text{حا ٤٥}}$، $\frac{\text{حا ٤٥}}{\text{حا ٣٥}}$ ب $\frac{\text{حا ٤٥}}{\text{حا ٨٠}}$، $\frac{\text{حا ٣٥}}{\text{حا ٨٠}}$ جـ $\frac{\text{حا ٨٠}}{\text{حا ٤٥}}$، $\frac{\text{حا ٨٠}}{\text{حا ٣٥}}$ د $\frac{\text{حا ٧٥}}{\text{حا ٨٠}}$، $\frac{\text{حا ٤٥}}{\text{حا ٣٥}}$

(٢) تتحرك سيارتان أ، ب بالسرعتين ٦٠كم/س، ٨٠ كم/س على الترتيب فى إتجاه واحد فإن ع(أب) = ...

أ -١٤٠ ب -٢٠ جـ ٢٠ د ١٤٠

(٣) المساحة الجانبية لهرم رباعى منتظم ارتفاعه ١٦سم وطول ضلع قاعدته ٢٤سم تساوى سم٢.

أ ٩٦٠ ب ٨٠ جـ ٤٠ د ١٥٣٦

(٤) محيط الدائرة التى معادلتها (س - ٣)٢ + (س + ٢)٢ = ٢٥ يساوى وحدة طولية

أ π٣ ب π٢ جـ π٢٥ د π١٠

السؤال الثالث:

(١) قوتان مقدارهما ٦، ٣ نيوتن فإذا كانت محصلتها عمودية على القوة الثانية فأوجد قياس الزاوية بينهما.

(٢) سقط جسم من ارتفاع ٢٢,٥م على أرض رملية فغاص فيها مسافة ٢٥سم. احسب

أ سرعة الجسم عند سطح الأرض

ب احسب العجلة التى يتحرك بها الجسم داخل الأرض

السؤال الرابع:

(١) وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية جيبها = ٠,٦ وحفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية. أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم

(٢) إذا كان طول نصف قطر كل من القمر والأرض ١٦٠٠ كم، ٦٤٠٠ كم على الترتيب وكانت النسبة بين عجلتى الجاذبية لكل منهما ١ : ٦ فأوجد النسبة بين كتلتيها على الترتيب

السؤال الخامس:

(١) صندوق به ٩ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٩ سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد المكتوب على البطاقة أوجد إحتمال كل من الأحداث التالية:

أ حدث ظهور عدد أولى. ب حدث ظهور عدد فردى أو يقبل القسمة على ٣.

(٢) احسب المدى الربيعى للبيانات التالية: ٣٩ ، ٥١ ، ٦٠ ، ٩٣ ، ٧٥ ، ٣٥ ، ٤٢ ، ٢٤

الاختبار الخامس — تطبيقات الرياضيات

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) يتحدد تأثير القوة على الجسم بالعوامل الآتية : ١ ٢ ٣

(٢) بدأ جسم حركته بسرعة ١٠م/ث فأصبحت ١٨م/ث بعد ٤ثوانى فى نفس الاتجاه فإن عجلة = ...

(٣) تتوقف قوة التجاذب بين جسمين على ،

(٤) إذا كان ل(أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٥}$، ل(ب) = $\frac{٣}{٨}$، أ ، ب حدثان متنافيان فإن ل(أ) = ...

السؤال الثانى: إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(١) قوتان مقدارهما $و_١$، $و_٢$ ث جم فإن المحصلة تكون فى قيمتها العظمى إذا كان قياس الزاوية بينهما

أ صفر° ب ٦٠° ج ١٢٠° د ١٨٠°

(٢) تناقصت سرعة سيارة ة من ٩٠ كم/س إلى ٣٦ كم/س فى خلال ٤ ثوان فإن المسافة خلال هذه الفترة تساوى

أ ١٠ متر ب ٢٥ متر ج ٧٠ متر د ١٤٠ متر

(٣) الوسيط للقيم: ٢٥، ١٦، ٢٨، ٣، ١٣، ٥٦، هو

أ ٢٨ ب ٣٠ ج ١٦ د $٢٦\frac{١}{٢}$

(٤) حجم المخروط القائم يساوى حيث $و$ طول نصف قطر قاعدته . ع ارتفاعه

أ $\frac{٤}{٣}\pi و^٢ ع$ ب $\frac{٣}{٤}\pi و^٢ ع$ ج $\frac{١}{٤}\pi و^٢ ع$ د $\frac{١}{٣}\pi و^٢ ع$

السؤال الثالث:

(١) كرة منتظمة ملساء وزنها ١٠ ث جم وطول نصف قطرها ٣٠سم، علقت من نقطة على سطحها بأحد طرفى خيط خفيف طوله ٢٠سم ومثبت طرفه الآخر فى نقطة من حائط رأسى أملس. أوجد فى وضع التوازن كلا من الشد فى الخيط ورد فعل الحائط.

(٢) يتحرك جسيم بعجلة منتظمة فى اتجاه ثابت فإذا قطع مسافة ٢٦ سم خلال الثانية الرابعة من بدء حركته وقطع ٥٦سم خلال الثانية التاسعة من بدء حركته احسب كلا من.

أ عجلة الجسم ب السرعة الابتدائية للجسم

السؤال الرابع:

(١) إذا علمت أن كتلة الأرض ٥,٩٧ × ١٠^٢٤ كجم وطول نصف قطرها ٦,٣٦ × ١٠^٦ متر فأوجد شدة مجال الجاذبية الأرضية إذا علمت أن ثابت الجذب العام يساوى ٦,٦٧ × ١٠^-١١ نيوتن.م^٢/كجم^٢

(٢) ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية ولوحظ تتابع الصور والكتابات، احسب احتمالات الأحداث الآتية:

أ حدث ظهور كتابة واحدة فقط ب حدث ظهور صورتين على الأكثر.

السؤال الخامس:

(١) يتحرك جسيم بحيث كان متجه موضعه $\overrightarrow{ر}$ يعطى كدالة فى الزمن بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$ بالعلاقة $\overrightarrow{ر}$ = (٦ن - ٣) $\overrightarrow{س}$ + (٨ن + ١) $\overrightarrow{ص}$. أوجد المسافة المقطوعة حتى اللحظة ن = ٣

(٢) احسب المدى الربيعى للقيم التالية: ٣٥ ، ١٢ ، ٢٦ ، ١٧ ، ٢٩ ، ٤٢ ، ١٥ ، ٣٦

الاختبار السادس — تطبيقات الرياضيات

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) قوتان مقدارهما ق، ق√٣ نيوتن تؤثران فى نقطة مادية ، محصلتهما ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما

(٢) النسبة بين عجلتى الجاذبية ى١، ى٢ على كوكبين كتلتاهما ك١، ك٢ وطولا نصفى قطريهما ع١، ع٢ على الترتيب هى

(٣) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان أ ⊃ ب فإن ل (أ ∪ ب) = ...

(٤) المساحة الكلية للهرم المنتظم = ...

السؤال الثانى: إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(١) قوتان مقدارهما ٨ ، ١٣ نيوتن، القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلتهما على الترتيب هما ،

أ ١٣ ، ٨ ب ١٣ ، ٥ ج ٢١ ، ٨ د ٢١ ، ٥

(٢) إذا بدأ جسيم حركته بسرعة ٣٠ سم/ث وبعجلة منتظمة ٥ سم/ث^٢ فى اتجاه سرعته الابتدائية فإن المسافة المقطوعة بعد ١٠ ثوانى من بدأ الحركة = ... سم

أ ٣٠٠ ب ١٥٠ ج ٥٥٠ د ١٥٠٠

(٣) المدى الربيعى = ...

أ الربيع الاعلى + الربيع الادنى ب الربيع الاعلى × الربيع الادنى

ج الربيع الاعلى - الربيع الادنى د الربيع الاعلى ÷ الربيع الادنى

(٤) طول قطر الدائرة س^٢ + ص^٢ - ٢س - ٦ص + ١ = صفر يساوى

أ ٥ ب ٣ ج ٦ د ٤

السؤال الثالث:

(١) إذا أثرت القوى $\overrightarrow{ق_1} = ٤\overrightarrow{س} + ٥\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_2} = أ\overrightarrow{س} - ٧\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3} = ٣\overrightarrow{س} + ب\overrightarrow{ص}$ فى نقطة مادية فأوجد قيمتى أ ، ب إذا كانت القوى متزنه.

(٢) قذف جسيم رأسيًا لأعلى بسرعة ٦٠م/ث ، أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم والزمن الذى يمضى حتى يعود إلى نقطة القذف.

السؤال الرابع:

(١) $\overline{أب}$ قضيب منتظم طوله ٤٠سم وزنه ٣٠ نيوتن متصل بمفصل فى حائط رأسى عند أ حفظ القضيب فى وضع أفقى بواسطة خيط خفيف يتصل بطرف القضيب عند ب وبنقطة جـ على الحائط تعلو أ رأسيًا بمسافة ٤٠ سم أوجد كلا من الشد ورد الفعل عند أ.

(٢) مكعب من الشمع طول حرفه ٣٠سم حول إلى مخروط دائرى قائم ارتفاعه ٤٥سم أوجد طول نصف قطر قاعدة المخروط إذا علم أن ٨٪ من الشمع قد فقد أثناء عمليتى الصهر والتحويل.

السؤال الخامس:

(١) سيارة (أ) متحركة على طريق مستقيم رصدت سرعة سيارة أخرى (ب) قادمة فى الاتجاه المضاد فوجدتها ١٣٠ كم/س، ولما خفضت السيارة (أ) سرعتها إلى النصف وأعادت رصد السيارة (ب) فوجدت أن سرعتها ١١٠كم/س فما هى السرعة الفعلية لكل من السيارتين.

(٢) فى احتفال المدرسة بتكريم اوائل طلابها إذا كان احتمال حضور المحافظ ٠,٧ واحتمال حضور مدير التعليم ٠,٨ واحتمال حضورهما معًا ٠,٦ أوجد احتمال:

أ حضور المحافظ فقط

ب احتمال حضور أحدهما على الأقل.

جـ احتمال عدم حضورهما معًا.

الاختبار السابع — تطبيقات الرياضيات

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) قوتان مقدارهما ق١، ق٢ إذا كانت القيمة العظمى لمحصلتهما ٩ نيوتن والقيمة الصغرى لمحصلتهما ٣ نيوتن فإن ق١= ق٢ = ...

(٢) جسم وزنه ٢٠ نيوتن وضع علي مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فإن مركبة الوزن فى اتجاه المستوى = ...

(٣) إذا تحرك جسم فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ع. وبعجلة منتظمة قدرها جـ فإنه يقطع مسافة ف خلال فترة زمنية ن تساوى

(٤) إذا كان أ حدث من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية وكان $\frac{ل(أ')}{ل(أ)} = \frac{٣}{٥}$ فإن ل(أ) = ...

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين القوسين:-

(١) قوتان مقدارهما ٣، ٤ نيوتن ، قياس الزاوية بينهما = $\frac{\pi}{٢}$ فإن مقدار محصلتهما = ... نيوتن

أ) ١ ب) ٥ جـ) ٧ د) ١٢

(٢) بدأ جسم حركته بسرعة ١٢٦ كم/س وتوقف بعد أن قطع مسافة ١٢٢,٥ متر فإن عجلة الحركة = ... م/ث^{٢}

أ) -٣,٥ ب) -٥ جـ) ٧ د) ١٠

(٣) إذا كان المدى الربيعى لمجموعة من القيم هو $\frac{١}{٢}$ ٤ والربيع الأعلى يساوى ٨ فإن قيمة الربيع الأدنى = ...

أ) ٤ $\frac{١}{٢}$ ب) ٨ جـ) ١٢ $\frac{١}{٢}$ د) ٣ $\frac{١}{٢}$

(٤) حجم مخروط دائرى قائم طول قطر قاعدته ١٢سم وارتفاعه ١٠سم يساوى سم^{٣}

أ) π١٢٠ ب) π ٤٠ جـ) π ٢٢ د) π٢٠

السؤال الثالث:

(١) إذا علمت أن قوة الجذب المتبادلة بين الشمس والأرض هى ٣٥,٦٧ × ١٠^{٢١} نيوتن وأن كتلة كل من الأرض والشمس هما ٥,٩٧ × ١٠^{٢٤} كجم ، ١٩ × ١٠^{٢٩} كجم وأوجد المسافة بين الأرض والشمس إذا علم أن ثابت الجذب العام يساوى ٦,٦٧ × ١٠$^{-١١}$ نيوتن . م^{٢}/ كجم^{٢}

(٢) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٨سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^{٣} فأوجد ارتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية .

السؤال الرابع:

(١) أ ب جـ ء هـ و سداسى منتظم أثرت القوى التى مقاديرها ٥ ، ٢$\sqrt{٣}$ ، ٤ ، ٣$\sqrt{٢}$ ، ٦ نيوتن فى $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أجـ}$ ، $\overleftarrow{أء}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ، $\overleftarrow{أو}$ على الترتيب أوجد مقدار واتجاه محصلة المجموعة

(٢) قطعت سيارة مسافة ٤٥ كم على طريق مستقيم بسرعة مقدارها ٦٠سم/س ثم عادت فقطعت مسافة ٧٤ كم فى الاتجاه المعاكس بسرعة ٥٠ كم/س أوجد متجه السرعة المتوسطة خلال الرحلة كلها.

السؤال الخامس:

(١) حلل قوة مقدارها ١٠٠ نيوتن فى اتجاهين يميل أولهما على القوة بزاوية قياسها ٦٠° ، والآخر يميل بزاوية قياسها ٣٠° من الناحية الأخرى.

(٢) مثل البيانات المقابلة بمخطط الساق والأوراق واستنتج الوسيط والربيع الأدنى ($ر_١$) والربيع الأعلى ($ر_٣$) ثم احسب المدى الربيعى.

٤٥	٤٢	٤٧	٤٩	٤٧
٥٢	٤٣	٥٤	٥٦	٥١
٤١	٤٧	٥٢	٥٣	٥٨
٥٦	٥٥	٥٤	٤٥	٥٢

الاختبار الثامن — تطبيقات الرياضيات

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

١ إذا كانت $\overrightarrow{ق_١}$ ، $\overrightarrow{ق_٢}$ قوتان متلاقيتان فى نقطة ، وقياس الزاوية بينهما ي° فإن المحصلة تميل على القوة الأولى $\overrightarrow{ق_١}$ بزاوية قياسها هـ° حيث طا هـ = ...

٢ قوة مقدارها ٦ نيوتن تعمل فى اتجاه الشمال الشرقى فإن مقدار مركبتها فى اتجاهى الشرق والشمال هما

٣ ٣٦ كم/س = ... م/ث

٤ إذا كان ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ ، حيث أ ، ب حدثين متنافيين فى فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان $\frac{\text{ل (أ)}}{\text{ل (ب)}} = \frac{٢}{٣}$ فإن ل(أ) = ... ، ل (ب) = ...

السؤال الثانى: **إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-**

١ قوتان متساويتان فى المقدار ومقدار محصلتهما يساوى ٨ نيوتن وقياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{٢}$ فإن مقدار كل منهما = ... نيوتن.

أ) $٢\sqrt{٢}$ ب) ٤ ج) $٤\sqrt{٢}$ د) ٨

٢ إذا كان المدى الربيعى يساوى ١٥ وكان الربيع الأدنى = $\frac{١}{٢}$ الربيع الأعلى فإن قيمة كل منهما على الترتيب

أ) ٥ ، ١٠ ب) ١٠ ، ٢٠ ج) ١٥ ، ٣٠ د) ٢٠ ، ٤٠

٣ قذف جسم رأسيا لأعلى بسرعة ٤٢ كم/س فإن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم يساوى .

أ) ٦٥ كم ب) ٩٨ كم ج) ٨٤ كم د) ٩٠ كم

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان أ ⊂ ب فإن:

أ) ل (أ ∪ ب) = ل (ب) ب) ل (أ ∪ ب) = ١ - ل (أ)

ج) ل (أ ∩ ب) = ل (ب) د) ل (أ ∩ ب) = صفر

السؤال الثالث:

١ كرة معدنية وزنها ٤٠٠ ث جم يؤثر فى مركزها موضوعه بين مستويين أملسين أحدهما رأسى والآخر يميل على الرأس بزاوية قياسها ٦٠° أوجد رد فعل كل من المستويين

٢ أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها (-٢ ، ٣) وطول قطرها ٨ وحدات طولية.

السؤال الرابع:

١ $\overline{أب}$ قضيب منتظم وزنه ٢٠ ث كجم يتصل طرفه أ بمفصل مثبت فى حائط رأسى أثرت قوة أفقية $\overrightarrow{ق}$ على القضيب عند ب فاتزن القضيب وهو يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠ أوجد مقدار $\overrightarrow{ق}$ ، ورد فعل المفصل.

٢ توضح البيانات التالية النسب المئوية لعدد من الطلاب فى اختبار الرياضيات:

٧٥ ، ٦٥ ، ٤٦ ، ٧٨ ، ٩٦ ، ٤٥ ، ٣٦ ، ٨٦ ، ٢٩ ، ٨٨ احسب المدى الربيعى لهذه البيانات.

السؤال الخامس:

(١) بدأ جسم حركته فى اتجاه ثابت بسرعة ١٥سم/ث وبعجلة منتظمة ٢,٥ سم/ث^{٢} فى اتجاه السرعة الابتدائية احسب المسافة التى قطعها الجسم خلال الثانية الرابعة.

(٢) سقطت كرة من ارتفاع ٩٠م عن سطح الأرض وعند وصولها للأرض ارتدت ثانية إلى أعلى بسرعة تساوى نصف سرعة وصولها إلى الأرض . أوجد أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة .

الاختبار التاسع — تطبيقات الرياضيات

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) قوتان متساويتان فى المقدار ومحصلتهما تساوى أى منهما فإن قياس الزاوية بين محصلتهما و إحداهما

(٢) إذا تحرك جسم بسرعة ابتدائية ١٠سم/ث وبعجلة منتظمة ٤سم/ث^{٢} فى اتجاه سرعته، فتصبح سرعته ٢٥سم/ث بعد زمن قدره ث

(٣) مقدار قوة الجذب بين جسمين كتلتاهما ك$_{١}$، ك$_{٢}$ والمسافة بينهما ف يساوى

(٤) إذا كان أ حدث فى فضاء عينة ف لتجربة عشوائية فإن ل(أ$'$) + ل (أ) = ...

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(١) القوة $\overrightarrow{ع}$ يمكن تحليلها إلى قوتين $\overrightarrow{ق_{١}}$ ، $\overrightarrow{ق_{٢}}$ وتصنعان مع $\overrightarrow{ع}$ زاويتين قياسيهما هـ$_{١}$، هـ$_{٢}$ من جهتيها على الترتيب فإن ق$_{١}$ = ...

أ $\frac{ع \text{ حا } هـ_{١}}{\text{حا } (هـ_{١} + هـ_{٢})}$ ب $\frac{ع \text{ حا } هـ_{٢}}{\text{حا } (هـ_{١} - هـ_{٢})}$ ج $\frac{ع \text{ حا } هـ_{٢}}{\text{حا } (هـ_{١} + هـ_{٢})}$ د $\frac{ع \text{ حا } (هـ_{١} + هـ_{٢})}{\text{حا } هـ_{٢}}$

(٢) إذا كان أ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان أ ∩ ب = ف ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ) = ١ - ل (ب) فإن:

أ ن (أ) = ن (ب) ب ن (أ) < ن (ب) ج ن (أ) > ن (ب) د ن (أ) + ن (ب) = ١

(٣) قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ٩٨م/ث فإن زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع = ...

أ ١٥ ث ب ١٠ ث ج ٣ ث د ٢٠ ث

(٤) مخروط دائرى قائم طول نصف قطر قاعدته ٧سم وطول راسمه ١٤سم فإن حجمه

أ $\frac{٤٩}{٣}\sqrt{٣}\pi$ سم^{٣} ب ٣٤٣π سم^{٣} ج $\frac{٤٩}{٣}\sqrt{٣}$ سم^{٣} د ٣٤٣ سم^{٣}

السؤال الثالث:

(١) كرة منتظمة ترتكز على قضيبين متوازيين يقعان فى مستوى أفقى واحد ، البعد بينهما يساوى طول نصف قطر الكرة أوجد الضغط على كل من القضيبين إذا كان وزن الكرة ١٠ نيوتن.

(٢) إذا كان الجسيم عند لحظتين زمنيتين ٢، ٥ عند الموضعين أ(٧، ٣) ، ب (١٢ ، ١٠) على الترتيب أوجد قيمة السرعة المتوسطة للجسيم خلال هذه الفترة الزمنية ثم أوجد معيار واتجاه هذه السرعة المتوسطة.

السؤال الرابع:

(١) ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٥، ١٠، ٤ √٧ نيوتن تؤثر فى نقطة مادية فإذا كان قياس الزاوية بين القوتين الأولى والثانية يساوى ٦٠° فأوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى لمحصلة القوى الثلاثة.

(٢) سقطت كرة من المطاط من ارتفاع ١٥ مترًا عن سطح الأرض فاصطدمت بالأرض وارتدت رأسيًا لأعلى مسافة ٦م . احسب سرعة الكرة قبل وبعد التصادم بالأرض مباشرة.

السؤال الخامس:

(١) أوجد الصورة العامة لمعادلة الدائرة التى مركزها م(-٢، ٥) وتمر بالنقطة (٣، ٢) .

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ل دالة احتمال لهذه التجربة حيث ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٢٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ احسب احتمال

أ وقوع أ ب وقوع أ أو ب جـ عدم وقوع أ وعدم وقوع ب

الاختبار العاشر — تطبيقات الرياضيات

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

السؤال الأول: أكمل مايأتى:

(١) قوتان مقدارهما ق ، ٤ق نيوتن ، مقدار محصلتهما ٤√٣ ق نيوتن فإن قياس الزاوية بينهما = ...

(٢) إذا اتزنت ثلاث قوى متلاقية فى نقطة فإن مقدار كل قوة يتناسب مع

(٣) ٤٥ كم/د = ... م/ث

(٤) إذا كان أ حدث من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن ل(أ') = ١ - ل (أ) ×

السؤال الثانى: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-

(١) إذا كان $\overrightarrow{ق_1}$ = ٥ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ق_2}$ = ٧ $\overrightarrow{س}$ - ٥ $\overrightarrow{ص}$ فإن || $\overrightarrow{ع}$ || = ... وحدة قوة

أ √٥ + √٧٤ ب ٤٩ جـ ١٣ د √١٢ - √٥

(٢) سقط جسم من ارتفاع ١٩,٦ متر على أرض رملية فغاص فيها ١٤ سم حتى سكن فإن عجلة حركة الجسم داخل الرمل = ... سم/ث^{٢}

أ ١٣٧٢ ب -٩,٨ جـ ١٩,٦ د ١٧٣٢

(٣) المنوال للقيم ٥ ، ٣٥ ، ٤٥ ، ٢٢ ، ١٣ ، ٤٥ ، ٥٢ ، ٤٥ يساوى

أ ٥ ب ٥٢ جـ ٤٠ د ٤٥

(٤) هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ١٠سم ارتفاعه الجانبى ١٣سم فإن حجمه يساوى سم^{٣}

أ $\frac{١}{٣}$ × (١٠)^{٢} × ١٣ ب $\frac{١}{٣}$ × (١٠)^{٢} × ١٢ جـ $\frac{١}{٣}$ × (١٢)^{٢} × ١٣ د $\frac{١}{٣}$ (١٣)^{٢} × ١٠

السؤال الثالث:

(١) وضع جسم وزنه ٨٠٠ ث جم على مستوى أملس يميل على الأفقى بزاوية هـ حيث حا هـ = ٠,٦ وحفظ الجسم فى حالة توازن بواسطة قوة أفقية أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل المستوى على الجسم

(٢) يتحرك جسيم فى خط مستقيم من نقطة ثابتة (و) بحيث أن متجه موضعه $\overrightarrow{ر}$ يتحدد بالعلاقة $\overrightarrow{ر} = (ن^{٢} + ٣ن + ٥)\ \overrightarrow{ى}$ حيث $\overrightarrow{ى}$ متجه وحدة مواز للخط المستقيم أوجد متجه الإزاحة، كذلك متجه السرعة المتوسطة منذ بدء الحركة حتى ن = ٣ ث

السؤال الرابع:

(١) حلل قوة قدرها ٩٠ نيوتن إلى قوتين متساويتين فى المقدار وقياس الزاوية بين اتجاهيهما ٦٠°

(٢) يتحرك جسم بعجلة منتظمة فى خط مستقيم فقطع ٢٤مترا خلال الثانية الرابعة وقطع ٣٤ مترا خلال الثانية التاسعة احسب كلاً من:

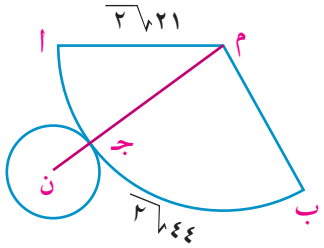
أ عجلة الحركة

ب مقدار السرعة الابتدائية للحركة

السؤال الخامس:

(١) الشكل يوضح شبكة مخروط قائم، مستعينًا بالبيانات المعطاه

أوجد حجمه $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$



(٢) فى تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة العدد الذى يظهر على الوجه العلوى فى كل مرة . احسب احتمال:

أ حدث أن يكون مجموع العددين يزيد عن ٨

ب حدث ظهور عددين متساويين

الوحدة الأولى: الاستاتيكا

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(٣) ١٠ (٤) ٤ (٥) $\sqrt{19}$
(٦) جـ (٧) د (٨) جـ
(٩) د (١٠) ب (١١) $\sqrt{5}\sqrt{3}$ ، ٩٠°
(١٢) $\sqrt{5}\sqrt{3}$ ث كجم ، طا$^{-1}\frac{1}{2}$
(١٣) ١٢٠° (١٤) ٨ نيوتن (١٥) $\sqrt{2}\sqrt{4}$ نيوتن
(١٦) ٨ نيوتن (١٧) ٩٠°
(١٨) ١٥ نيوتن ، عمودية على ١٢
(١٩) $\sqrt{3}\sqrt{2}+1$ (٢٠) $\sqrt{3}\sqrt{6}$ ، ٦ ث. كجم
(٢١) ٥، ٣ نيوتن (٢٢) ١٥ ث كجم
(٢٣) $\sqrt{5}\sqrt{3}$ ث كجم (٢٤) $\sqrt{3}\sqrt{2}$:

اجابة بعض تمارين الدرس الثانى

(١) صفر (٢) ٤
(٣) ٨,٧٨ نيوتن ، ٦,٢١ نيوتن (٤) ٢٥,٤٦ ، ١٨
(٥) ٦ ، ٦ (٦) $\sqrt{6}\sqrt{6}$ ، $\sqrt{6}\sqrt{2}$
(٧) ٤٣٩ ، ٣١١ (٨) $\sqrt{60}\sqrt{2}$ ، $\sqrt{60}\sqrt{2}$
(٩) $\sqrt{80}\sqrt{3}$ ، ٨٠ (١٠) $\sqrt{9}\sqrt{3}$ ، ٩
(١١) $\sqrt{21}\sqrt{3}$ ، ٢١ (١٢) ١٥٠ ، ٣٦٠

اجابة بعض تمارين الدرس الثالث

(١) ٥ ، طا$^{-1}\frac{4}{3}$ (٢) ٣، $\frac{10}{3}$ (٣) ١، -١
(٤) شكل ١ طا$^{-1}\frac{3}{4}$ شكل ٢ $\sqrt{3}\sqrt{3}$ ، ٤٥°
شكل ٣ ع =١ فى اتجاه ق$_1$
شكل ٤ ٢ $\sqrt{3}\sqrt{3}$ فى إتجاه القوة ٦ $\sqrt{3}\sqrt{3}$ ،
شكل ٥ $\sqrt{58}$ ، ٢١٣° ٤١′ ٢٤″
شكل ٦ ٢٠ نيوتن فى اتجاه $\overleftarrow{أ}$
(٥) ٣ ، ٢٤٠° (٦) $\sqrt{10}\sqrt{3}$ ، ٣٠° جنوب الغرب
(٧) ١٠ نيوتن ، ١٢٠° (٨) $\sqrt{5}\sqrt{3}$ نيوتن ، ٦٠°
(٩) $\sqrt{10}\sqrt{2}$ ، فى اتجاه $\overleftarrow{أجـ}$ (١٠) ١ ، -١

اجابة بعض تمارين الدرس الرابع

(١) بمضلع مقفل (٢) س= ٠ ، ص = ٠
(٣) ٣، ٥ (٤) ٥ نيوتن
(٥) مقادير القوى المتناظرة
(٦) جيوب الزوايا المقابلة.

(٧) تتلاقى فى نقطة واحدة (٨) ١٢٠°
(٩) ٣ ، ٣ $\sqrt{3}$
(١٠) شكل ١ ٢٠ $\sqrt{3}\sqrt{3}$ ، ٤٠ $\sqrt{3}\sqrt{3}$
شكل ٢ ٦ $\sqrt{3}\sqrt{3}$ ، ٦ شكل ٣ ٥٠ $\sqrt{5}\sqrt{5}$ ، ٥٠
شكل ٤ ١٨ ، ٢٤ شكل ٥ ٢٠ $\sqrt{2}\sqrt{2}$
شكل ٦ هـ = ٦٠° ، و = ١٦
(١١) ٣٠ ، ٣٠ $\sqrt{3}\sqrt{3}$ ث.جم
(١٢) ١٦٠ ث.جم ، ١٢٠ ث. جم
(١٣) ٦٠° ، ١٠٠ $\sqrt{3}\sqrt{3}$ ث جم
(١٤) ٦٠٠ ، ١٠٠٠ ث.م (١٥) ٧٢ ، ٣٦ $\sqrt{3}\sqrt{3}$ نيوتن
(١٦) $\sqrt{3}\sqrt{3}$ ، ٦ نيوتن (١٧) ١٢، ١٦ نيوتن
(١٨) ٩ ، ٥ ث . كجم (١٩) ق = ٦ ، ك = ٩
(٢٠) ٣٠ ° ، ٢ $\sqrt{3}\sqrt{3}$ ث كجم

الوحدة الثانية: الديناميكا

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١) ٧٢ (٢) ٢٥ (٣) ١٨
(٧) جـ (٨) جـ (٩) جـ
(١٠) جـ (١١) ٢٢٥م (١٣) ٦ كم/س
(١٥) ١٥٠، ٣٠ (١٦) ٦٠، ١٢٠

نشاط (٢)

(٢٠) ٢٨ (٢١) ٢ (٢٢) ١٥ كم/س

اجابة بعض تمارين الدرس الثانى

(١) أ ٢٤ ب ١٠ هـ ٣ م/ث^2
(٢) ٧٢م (٣) ٣٦٣م (٤) ٦,٢٥
(٦) ٢٧ م (٧) ٨١، ١٠٨٠ (٨) ٤٢م
(١١) ٣ث (١٣) ٨ ثوان

اجابة بعض تمارين الدرس الثالث

(١) ٨,٤ م/ث (٢) ٥٨,٨ م/ث
(٣) أ ١٠ ث ب ٤٩ م/ث
(٤) ١٤ م/ث، ٧ م/ث
(٦) ١٤,٧م/ث، ٢ث (٨) ١٠ث
(٩) أ ١٩,٦ م/ث^2 ب ١٩,٦م جـ ٢٤,٥ متر
(١٠) أ ٣,٦ م ب ٢ ث د ٥ ث

(١١) أ ٣٥ م/ث ب ٦٢,٥ م ج ١٠ ث

(١٢) ٣ث، ٤٤,١م، ١٥,٩ م

اجابة بعض تمارين الدرس الرابع

(٦) $٨,٠٠٤ \times ١٠^{-١٢}$ (٧) $٦,٧٣٦٨ \times ١٠^{-١٢}$

(٨) $٢,٥ \times ١٠^{-٩}$ (٩) $١,٧٣١ \times ١٠^{١٠}$

(١٠) ٦×١٠^{٢٤} (١١) $١,٦٠٠٨ \times ١٠^{٢٢}$

(١٢) $\frac{٣٦٨}{٢٥٢٣}$ (١٣) ١٠م/ث^{٢}

(١٤) ١ : ٣ (١٥) $٢,٦٦٨ \times ١٠^{٣٣}$

(١٦) ٩ كجم

الوحدة الثالثة: الهندسة والقياس

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١) أ ٥ ب ٦ ج ٥

(٣) ١٢٠ سم، ١٠٩ سم تقريبًا

(٤) ٢٠٠ سم ١٤٥ متر تقريبًا

اجابة بعض تمارين الدرس الثانى

(١) أ ٩٠ سم^{٢}، ١٠٥,٦ سم^{٢}

ب ٣٦٠ سم^{٢}، ٥٠٤ سم^{٢}

(٢) أ ٧٢π سم^{٢}، ١٠٨π سم^{٢}

ب $٢٧\sqrt{٥٨}\pi$ سم^{٢}، ٥٢٨,٦ سم^{٢}

(٤) أ ٣٤ متر مربع ب ٥١٠ جنيهًا

(٥) ٢٩,٢٤ سم

اجابة بعض تمارين الدرس الثالث

(١) ١٢٠٠ سم^{٣} (٢) ٩١٧٥,٨ سم^{٣}

(٣) ١٠ سم (٤) ٣٥٠٠ سم^{٣}

(٦) ١٢٨٢,٨ سم^{٣} (٧) ٣٤٢,٣ سم^{٣}

(١٢) أ ١٢π وحدة مربع

(١٣) أ ٢٠٠ سم^{٣} ب ٤٠٠٠ سم^{٣}

اجابة بعض تمارين الدرس الرابع

(١) أ (٢) جـ (٣) ب

(٤) ب (٥) د (٦) د

(١٢) أ م (٢، -٣)، ‖و‖ = ٥

ب م(-١، ٠)، ‖و‖ = ٣

جـ م(٣، -٥)، ‖و‖ = $\sqrt{٣٤}$

(١٥) $س^{٢} + ص^{٢} - ١٤س + ١٨ص - ٧٧٠ = ٠$

(١٦) ٢٨٣ وحدة مربعة تقريبًا.

(١٧) $س^{٢} + ص^{٢} + ١٠س - ١٨ص + ١٠٢ = ٠$

اجابة بعض التمارين العامة

(٢) أ ٦٠π سم^{٢} ب ٣٨٤ سم^{٢}

(٣) ع = ٩سم (٤) ٢٦٠ سم

(٥) ٢٨٢,٧ سم^{٢} تقريبًا

(٧) $س^{٢} + ص^{٢} - ١٠س + ١٢ص$ = صفر

(٩) ١١٠٠ متر مربع (١١) ١٩٤٦ متر مربع تقريبًا

الاختبار التراكمى

(١) جـ (٢) د (٣) ب

(٥) أ ١٢٨٠ سم^{٣} ب ١٤٣٣ سم^{٣}

(٦) $س^{٢} + ص^{٢} - ٤س + ١٤ص - ٤٨ = ٠$

(٨) ١٧٦١,٨ سم^{٣} (٩) ١٦٧,٣ سم^{٣}

الوحدة الرابعة: الاحصاء والاحتمال

اجابة بعض تمارين الدرس الأول

(١) ٢٣ (٢) ٢,٧ (٣) ١,٤

(٤) ١٦°س (٥) ٤٣°س (٧) ٢٠°س

اجابة بعض تمارين الدرس الثانى

(١) د (٢) جـ

(٣) ٤٩,٥ ، ٤٦,٥ ، ٥٣ ، ٦,٥ (٤) ٧٢ ، ٧٢

اجابة بعض تمارين الدرس الثالث

(٥) أ، ب، جـ (٧) $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{١}{١٨}$ (٨) ٠,٣٥ ، ٠,٢٥

(١٠) أ ٠,٢ ب ٠,٤٥ جـ ٠,٥٥

(١٤) $\frac{١}{٦}$ ، $\frac{٥}{٣٦}$ ، $\frac{٥}{١٨}$

اجابة بعض التمارين العامة

(٣) ٨١٥ ، ١١٠ (٦) ١٢ (٧) ١٠

(١١) ٠,٧ (١٤) $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$

(١٧) أ ٠,٣٦ ب ٠,٨٨

الاختبار التراكمى

(١) ب (٣) جـ

(٦) أ ٠,٦٦ ب ٠,٧٢

جـ ١ د صفر

(٨) ب ٧٤ ، ٧٣

(١٠) أ ٠,٤ ب ٠,٣ ج ٠,٥

الاختبار الأول: السؤال الثالث

(١) ١٢٠ (٢) $٢\sqrt{٥٠}$

الاختبار الثانى: السؤال الأول:

(١) ٤ (٢) ٢٠٠ كم/س

السؤال الثانى:

(١) جـ (٢) جـ (٣) أ

الاختبار الثالث: السؤال الثانى:

(١) د (٢) جـ

السؤال الخامس:

(٢) أ- $\frac{١}{٨}$ ب- $\frac{١}{٤}$

الاختبار الرابع: السؤال الأول:

(٤) ل(ب)

السؤال الثانى:

(٤) جـ

السؤال الثالث:

(١) ١٢٠ (٢) أ ٢١ م/ث ب ٨٨٢ م/ث^{٢}

الاختبار السادس: السؤال الأول:

(١) ١٥٠

السؤال الثانى:

(١) د (٢) جـ

الاختبار السابع:

(١) ب (٢) ب (٣) د (٤) أ

الاختبار الثامن: السؤال الثانى:

(١) جـ (٢) جـ

الاختبار العاشر: السؤال الثانى:

(١) جـ (٣) د